

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 344 с.

За последние 10 лет методы топологии оказали большое влияние на развитие наиболее передовых областей математики, механики, современной теоретической и математической физики.

Книга, опирающаяся на учебник тех же авторов «Современная геометрия», изданный в 1979 г., содержит доступное изложение методов теории гомологий, освобожденное от утомительного языка абстрактной гомологической алгебры. Более сложная часть книги содержит введение в современные методы вычисления гомотопических групп и классификации многообразий.

Для научных работников различных специальностей: математиков, механиков, физиков-теоретиков.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Гомологии и когомологии. Рецепты их вычисления	7
§ 1. Группы когомологий как классы замкнутых дифференциальных форм. Их гомотопическая инвариантность	7
§ 2. Гомологии алгебраических комплексов	22
§ 3. Симплициальные комплексы. Их гомологии и когомологии. Классификация двумерных замкнутых поверхностей	28
§ 4. Операция приклейки клетки к топологическому пространству. Клеточные пространства. Теоремы о приведении клеточных пространств. Гомологии и фундаментальная группа поверхностей и некоторых других многообразий	42
§ 5. Сингулярные гомологии и когомологии. Их гомотопическая инвариантность. Точная последовательность пары. Относительные гомологии	56
§ 6. Сингулярные гомологии клеточных комплексов. Их совпадение с клеточными гомологиями. Двойственность Пуанкаре для симплициальных гомологий	67
§ 7. Гомологии прямого произведения. Умножение в когомологиях. Когомологии H -пространств и групп Ли. Когомологии унитарной группы	76
§ 8. Гомологии косых произведений (расслоенных пространств)	87
§ 9. Задача о продолжении отображений, гомотопий и сечений. Препятствующий класс когомологий	99
§ 10. Гомологии и методы вычисления гомотопических групп. Теорема Картана—Серра. Когомологические операции. Векторные расслоения	105
§ 11. Гомологии и фундаментальная группа	133
§ 12. Когомологии гиперэллиптических римановых поверхностей. Торы Якоби. Геодезические на многоосных эллипсоидах. Связь с конечнозонными потенциалами	140
§ 13. Простейшие свойства кэлеровых многообразий. Абелевы торы	152
§ 14. Гомологии с коэффициентами в пучках	157
Глава 2. Критические точки гладких функций и гомологий	164
§ 15. Функции Морса и клеточные комплексы	164
§ 16. Неравенства Морса	169
§ 17. Правильная функция Морса—Смейла. Ручки. Поверхности	175
§ 18. Двойственность Пуанкаре	186
§ 19. Критические точки гладких функций и категория Люстерника—Шнирельмана	191
§ 20. Критические многообразия и неравенства Морса. Функции с симметрией	204
§ 21. Критические точки функционалов и топология пространства путей ΩM	211

§ 22. Применения теоремы об индексе	222
§ 23. Периодическая задача вариационного исчисления	229
§ 24. Функции Морса на трехмерных многообразиях и диаграммы Хегора	238
§ 25. Унитарная периодичность Ботта и многомерные вариационные задачи	243
§ 26. Теория Морса и некоторые движения в плоской задаче n тел	264
Глава 3. Кобордизмы и гладкие структуры	277
§ 27. Характеристические числа. Кобордизмы. Циклы и подмногообразия. Сигнатура многообразий	277
§ 28. Гладкие структуры на семимерной сфере. Проблема классификации гладких многообразий (нормальные инварианты). Кручение Райдемайстера и основная гипотеза комбинаторной топологии	300
Литература	311
Приложение 1. Аналог теории Морса для многозначных функций. Некоторые свойства скобок Пуассона. С. П. Новиков	314
Приложение 2. Задача Плато, бордизмы и глобально минимальные поверхности в римановых многообразиях. А. Т. Фоменко	327
Предметный указатель	342

ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционно теория гомологий играет фундаментальную роль в изложении начал топологии. Начиная с А. Пуанкаре, создавшего основы топологии, теория гомологий рассматривается как первичная начальная основа методов алгебраической топологии. Из теории гомотопий к числу таких начал традиционно относились только фундаментальная группа и накрытия. Практически все классические начальные учебники топологии (среди которых наилучшим, по мнению авторов, является книга Зейферта и Трельфалля «Топология») начинаются с изложения теории гомологий того или иного класса комплексов. Лишь на более позднем этапе рассматривается (к тому же под углом зрения теории гомологий) теория расслоенных пространств и общая задача о классификации гомотопических классов отображений (теория гомотопий). Вместе с тем методы топологии дифференцируемых многообразий, начавшие интенсивно развиваться с 30-х годов (Уитни и др.), позволяют полностью перестроить изложение фундаментальных основ современной топологии. С новой точки зрения, более близкой к классическому анализу, первичной оказывается элементарная теория гладких многообразий, основанная на ней теория гомотопий*) и гладких расслоенных пространств. Более того, в течение 70-х годов выяснилось, что именно этот комплекс топологических идей и методов имеет фундаментальные приложения в различных разделах современной физики. Вследствие этих причин авторы считают общепригодным учебным топологическим материалом в первую очередь именно основы теории гладких многообразий, теории гомотопий и расслоенных пространств, и включили этот материал в учебное пособие: Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», часть II. В данной книге мы предполагаем известным этот материал.

Решение более сложных задач самой топологии (вычисление гомотопических групп, классификация гладких многообразий

*) По-видимому, первые идеи топологии, восходящие к Гауссу, Риману и Пуанкаре, возникли также на этой базе. Однако в те времена такое построение топологии оказалось невозможным. Пуанкаре открыл теорию гомологий симплициальных комплексов, позволившую дать совершенно другое точное построение основ алгебраической топологии.

и т. д.), а также многочисленные приложения алгебро-топологической техники в задачах алгебраической геометрии и комплексного анализа требует далеко идущего развития методов именно теории гомологий. В современной топологической литературе полностью отсутствуют книги, по которым можно было бы освоить комплекс методов теории гомологий в их внутритопологических приложениях, упомянутых выше. Настоящая книга имеет своей целью частично восполнить этот пробел.

В изложении теории гомологий авторы старались избежать, по возможности, абстрактного языка гомологической алгебры, чтобы читатель все время помнил, что гомологии, циклы и границы — это конкретные геометрические образы. В некоторых случаях — например в разделе, посвященном спектральной последовательности, это самоограничение приводит к некоторым трудностям истребимым дефектам изложения. Однако последовательное изложение языка и методов современной гомологической алгебры, как показывает опыт, приводит к еще худшим дефектам, затрудняя понимание геометрического смысла теории гомологий. Некоторые фундаментальные методы современной алгебраической топологии (техника спектральных последовательностей и когомологических операций) изложены без полных обоснований, которые потребовали бы кардинального увеличения объема. Напомним, что использование этих методов базируется лишь на формально-алгебраических свойствах входящих в них величин и не использует явных конструкций этих величин, дававшихся в процессе обоснования. В конце книги методы алгебраической топологии применяются к изучению глубоких свойств характеристических классов и гладких структур на многообразиях. По замыслу авторов данная монография должна подводить читателя к чтению современной топологической литературы.

Большой вклад в формирование книги внес редактор Виктор Матвеевич Бухштабер. Благодаря ему целый ряд мест был переделан, улучшены многие доказательства. Авторы благодарят В. М. Бухштабера за эту большую работу.

Глава I

ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ. РЕЦЕПТЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Группы когомологий как классы замкнутых дифференциальных форм. Их гомотопическая инвариантность

Один из важнейших гомотопических инвариантов многообразия — это его группы гомологий, которые уже использовались в § 19 и §§ 24, 25 ч. II книги [1], и к систематическому определению их мы сейчас перейдем.

Имеется несколько способов определить группы гомологий. Мы рассмотрим первоначально определение гомологий через дифференциальные формы (см. [1], ч. II, § 25).

Рассмотрим замкнутые дифференциальные формы степени k на многообразии M^n (напомним: индекс n указывает на размерность многообразия), имеющие локально вид:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad d\omega = 0. \quad (1)$$

Замкнутая дифференциальная форма называется точной (или когомологичной нулю), если $\omega = d\omega'$, где ω' — форма степени $k-1$ (напомним, что $d(d\omega') = 0$ ([1], ч. I, § 25)).

О п р е д е л е н и е 1*). Группой (линейным пространством) когомологий $H^k(M^n; R)$ называется факторгруппа всех замкнутых форм степени k по подгруппе точных форм. Другими словами, $H^k(M^n; R)$ есть классы эквивалентности замкнутых форм с точностью до точных:

$$\omega_1 \sim \omega_2, \text{ если } \omega_1 - \omega_2 = d\omega'. \quad (2)$$

Простейшим свойством групп когомологий является следующее

*) В дальнейшем нам встретятся различные определения групп гомологий и когомологий с теми или иными коэффициентами. Учитывая тот факт, что эти определения приводят к одному и тому же результату (см. ниже §§ 6, 14), мы сознательно не вводим никаких индексов, указывающих на происхождение тех или иных гомологий.

Утверждение 1. Для любого многообразия M^n группа $H^0(M^n; \mathbb{R})$ есть линейное пространство размерности q , равной числу связанных кусков (компонент), из которых состоит многообразие.

Доказательство. Формы степени 0 — это скалярные функции $f(x)$ на многообразии. Если форма степени 0 замкнута, то $df(x) = 0$. Это означает, что функция $f(x)$ локально постоянна, т. е. постоянна на каждом связном куске многообразия. Замкнутые формы степени 0 — это просто наборы из q констант, где q — число кусков. Утверждение доказано, так как точных форм здесь нет.

Если имеется гладкое отображение многообразий $f: M_1 \rightarrow M_2$, то определено отображение форм $\omega \rightarrow f^*(\omega)$ такое, что $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ ([1], ч. I, § 25). Поэтому определено отображение групп когомологий

$$f^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R}), \quad (3)$$

так как классы эквивалентности переходят друг в друга (при отображении f^* замкнутые формы остаются замкнутыми, а точные — точными). Отображение f^* является гомоморфизмом групп когомологий.

Имеет место следующая

Теорема 1. Если заданы два гладких отображения

$$f_1: M_1 \rightarrow M_2 \text{ и } f_2: M_1 \rightarrow M_2,$$

и эти отображения гомотопны, то отображения групп когомологий f_1^* и f_2^* совпадают: $f_1^* = f_2^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть задана гладкая гомотопия $F: M_1 \times I \rightarrow M_2$, где I — отрезок, $1 \leq I \leq 2$, и $F(x, 1) = f_1(x)$, $F(x, 2) = f_2(x)$. Любая дифференциальная форма Ω степени k на $M \times I$ имеет вид

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt, \quad \Omega|_{t=t_0} = \omega_1(t_0), \quad (4)$$

где ω_1 — форма степени k , не содержащая среди дифференциалов dt , и ω_2 — форма степени $k-1$, не содержащая среди дифференциалов dt (локальные координаты в $M_1 \times I$ выбираются всегда в виде $(x^1, \dots, x^n, t) \equiv (x, t)$, где $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M). Пусть ω — любая форма степени k на многообразии M_2 . Тогда форма $F^*(\omega) = \Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, где локально мы имеем

$$\omega_2 = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} a_{i_1 \dots i_{k-1}}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} b_{i_1 \dots i_k}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Определим форму $D\Omega$ степени $k-1$ следующей формулой (локально):

$$D\Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \left(\int_1^2 a_{i_1 \dots i_{k-1}}(x, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} = \int_1^2 \omega_2 dt. \quad (5)$$

$D\Omega$ — это форма степени $k-1$ на многообразии $M_1 \times I$. Имеет место важная

Лемма 1. Верна формула «алгебраической гомотопии» (см. § 2):

$$d(D(F^*(\omega))) \pm D(d(F^*(\omega))) = f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega). \quad (6)$$

Доказательство. Покажем, что для любой формы Ω на $M_1 \times I$ верна формула

$$dD(\Omega) \pm D(d\Omega) = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \quad (7)$$

Вычислим $dD(\Omega)$, где $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$. Локально мы имеем, по определению,

$$dD\Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \sum_I \left(\int_1^2 \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x^I} dt \right) dx^I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$Dd\Omega = D(d\omega_1) + D(d\omega_2 \wedge dt) =$$

$$= D \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_q \frac{\partial b_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^q} dx^q \wedge \dots \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \right. \\ \left. + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial b_{i_1 \dots i_k}}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) + \\ + D \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \sum_p \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt \right).$$

Отсюда мы видим, что

$$dD\Omega + (-1)^{k+1} Dd\Omega = \pm \sum_{i_1 < \dots < i_k} (b_{i_1 \dots i_k}(x, 2) - b_{i_1 \dots i_k}(x, 1)) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}.$$

Формула (7) доказана. Если теперь $\Omega = F^*(\omega)$, то $\Omega|_{t=2} = f_2^*(\omega)$, $\Omega|_{t=1} = f_1^*(\omega)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть задана замкнутая форма ω на M_2 (т. е. $d\omega = 0$). Тогда имеет место равенство

$$f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega) \pm DdF^*(\omega).$$

Однако $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$. Поэтому мы имеем $f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega)$, т. е. разность форм точна. Это и означает, по определению, что гомоморфизмы

$$f_1^*: H^k(M_2; R) \rightarrow H^k(M_1; R), \text{ и } f_2^*: H^k(M_2; R) \rightarrow H^k(M_1; R)$$

совпадают на классах эквивалентности (когомологий). Теорема доказана.

Напомним (см. [1], ч. II, § 17), что два многообразия называются гомотопически эквивалентными, если найдутся такие (гладкие) отображения $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_1$, что обе суперпозиции $fg: M_2 \rightarrow M_2$ и $gf: M_1 \rightarrow M_1$ гомотопны тождественным отображениям:

$$M_1 \rightarrow M_1 (x \mapsto x), \quad M_2 \rightarrow M_2 (y \mapsto y).$$

Например, евклидово пространство R^n (или диск $D^n = \{ \sum_{\alpha=1}^n (x^\alpha)^2 \leq R^2 \}$) гомотопически эквивалентно точке. Доказательство состоит в том, что R^n (или D^n) деформируется по себе к точке. Точно это значит, что тождественное отображение $1: R^n \rightarrow R^n$, где $x \mapsto x$, гомотопно постоянному отображению $R^n \rightarrow 0$ (в точку).

Теорема 2. Гомотопически эквивалентные многообразия имеют одинаковые группы когомологий.

Доказательство. Пусть отображения $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_1$ устанавливают гомотопическую эквивалентность. Рассмотрим отображения $f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$ и $g^*: H^k(M_1) \rightarrow H^k(M_2)$. Так как отображения fg и gf гомотопны тождественным, то гомоморфизмы $(fg)^* = g^*f^*$ и $(gf)^* = f^*g^*$ в точности являются тождественными гомоморфизмами групп когомологий по теореме 1:

$$1 = g^*f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_2),$$

$$1 = f^*g^*: H^k(M_1) \rightarrow H^k(M_1).$$

Отсюда следует, что сами гомоморфизмы f^* и g^* — это изоморфизмы, причем взаимно обратные: $f^* = (g^*)^{-1}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Согласно доказанной теореме, можно определить группы когомологий для всех пространств X , для которых

найдется многообразие $M \supset X$, которое к этому пространству стягивается, полагая

$$H^k(X; R) \equiv H^k(M^n; R). \quad (8)$$

Например, восьмерка — это не многообразие, но для нее можно определить группы когомологий — те же, по определению, что и для области $R^2 \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ (см. рис. 1).

С л е д с т в и е 1. Группы когомологий евклидова пространства R^n или диска D^n те же, что и у точки, т. е. $H^k(R^n)$ — тривиальна при $k > 0$, $H^0(R^n) = R$ — одномерное линейное пространство.

Из этого факта следует так называемая «лемма Пуанкаре»: локально, в области около любой точки на многообразии M^n , всякая замкнутая форма ω ($d\omega = 0$) является точной: $\omega = d\omega'$, $\deg \omega > 0$.

Действительно, выберем диск D^n в локальных координатах с центром в точке $Q: \{ \sum_{\alpha=1}^n (x^\alpha - x_0^\alpha)^2 < \varepsilon \}$ и применим к диску следствие 1 о том, что $H^k(D^n) = 0$ при $k > 0$.

Для $k = 1$ лемма Пуанкаре хорошо известна из курса анализа. Для 1-форм $\omega = f_k dx^k$, $d\omega = 0$, мы имеем: $\omega = dF$, где $F(P) = \int_Q^P f_k dx^k$ по пути, идущему из точки Q в точку P в диске D^n .

Вычислим теперь когомологии окружности S^1 .

У т в е р ж д е н и е 2. Группы когомологий окружности S^1 имеют вид

$$H^k(S^1; R) = 0, \quad k > 1; \\ H^1(S^1; R) = R; \quad H^0(S^1; R) = R. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, когомологии S^1 тривиальны (равны 0), если $k > 1$. Далее, $H^0(S^1) = R$, так как окружность связна. Для вычисления группы $H^1(S^1)$ мы введем координату φ , где φ и $\varphi + 2\pi$ представляют одну точку окружности при целых n . Форма степени 1 — это форма вида $a(\varphi) d\varphi = \omega$, где $a(\varphi)$ — периодическая функция $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$. Всегда $d\omega = 0$, так как размерность окружности равна единице. Когда форма $a(\varphi) d\varphi$ точна? Это значит, что $a(\varphi) d\varphi = dF$, где $F(\varphi)$ — периодическая функция. Очевидно, $F(\varphi) = \int_0^\varphi a(\psi) d\psi + \text{const}$. Итак, функция $F(\varphi)$ периодична тогда

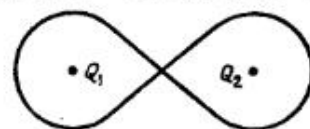


Рис. 1.

и только тогда, когда выполнено условие $\int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi = 0$, или $\int_{S^1} \omega = 0$.

Следовательно, форма степени 1 $\omega = a(\psi) d\psi$ на окружности точна, если и только если выполнено условие $\int_{S^1} \omega = 0$.

Поэтому две формы $\omega_1 = a(\psi) d\psi$ и $\omega_2 = b(\psi) d\psi$ определяют один и тот же класс когомологий тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \omega_1 = \int_{S^1} \omega_2$. Поэтому мы получаем, что $H^1(S^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Утверждение доказано.

Следствие. Группы когомологий евклидовой плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ (или кольца) те же, что и у окружности и имеют вид:

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = 0, \quad k > 1; \quad H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \mathbb{R}. \quad (10)$$

Замечание. Укажем еще один способ вычисления когомологий окружности. Каждой форме $\omega(\psi) = a(\psi) d\psi$ сопоставим «усредненную» форму

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\psi + \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\psi + \tau) d\tau \right] d\psi.$$

Утверждение 3. Форма ω когомологична форме $\bar{\omega}$.

Доказательство. Форма $\omega(\psi + \tau)$ индуцирована отображением $\tau: \psi \mapsto \psi + \tau$ окружности S^1 в себя. Это отображение гомотопно тождественному. Поэтому $\omega(\psi) \sim \omega(\psi + \tau)$. Интегральная сумма для $\bar{\omega}$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_i \omega(\psi + \tau_i) \Delta\tau_i \sim \omega(\psi) \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_i \Delta\tau_i = \omega(\psi). \quad (11)$$

Любая такая интегральная сумма, следовательно, когомологична ω . Утверждение доказано. Форма $\bar{\omega}$ имеет вид

$$\bar{\omega}(\psi) = \alpha d\psi, \quad \text{где } \alpha = \text{const} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi.$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\psi) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\psi + \tau) d\tau \right] d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\psi}^{\psi+2\pi} a(\psi) d\psi \right] d\psi = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi \right] d\psi. \end{aligned}$$

(Говорят, что форма $\bar{\omega}(\psi)$ инвариантна относительно вращений: $\bar{\omega}(\psi + \psi_0) = \bar{\omega}(\psi)$.)

Итак, каждому классу когомологий ω мы сопоставили инвариантную (относительно вращений) форму $\bar{\omega}$, т. е. вещественное число. Это соответствие, очевидно, взаимно однозначно, и мы получаем $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Ниже будет показано, как можно обобщить приведенное рассуждение для вычисления когомологий компактных однородных пространств.

Утверждение 4. У ориентируемого замкнутого риманова многообразия M^n группа когомологий $H^n(M^n)$ нетривиальна.

Доказательство. Рассмотрим элемент объема Ω , где (локально) имеем: $\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Если набор областей локальных координат выбран в соответствии с ориентацией (т. е. все якобианы функций перехода положительны), то Ω — это дифференциальная форма степени n , причем мы имеем $\int_{M^n} \Omega > 0$ (это объем многообразия M^n). Очевидно, $d\Omega = 0$, так как степень формы Ω равна n . Если бы было $\Omega = d\omega$, то по формуле Стокса мы бы имели

$$\int_{\partial M^n} \omega = \int_{M^n} d\omega = \int_{M^n} \Omega = 0 \quad (12)$$

(так как M^n замкнуто и не имеет границы). Получаем противоречие. Утверждение доказано.

Замечание. Если замкнутое многообразие M^n неориентируемо (например, $M^3 = \mathbb{RP}^3$), то группа $H^n(M^n; \mathbb{R})$ тривиальна — это будет доказано в § 3. В частности, элемент объема $\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ при заменах с отрицательным якобианом ведет себя не как дифференциальная форма.

Пусть $H^*(M^n) = \sum_{k=0}^n H^k(M^n)$ — прямая сумма групп когомологий. Введем в группе $H^*(M^n)$ структуру кольца.

Утверждение 5. Пусть ω_1, ω_2 — замкнутые формы. Тогда формы $\omega_1 \wedge \omega_2$ и $(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2$ замкнуты и когомологичны.

Доказательство. Согласно формуле Лейбница (см. [1], ч. I, § 25) имеем:

$$d(\omega' \wedge \omega_2) = d\omega' \wedge \omega_2 \pm \omega' \wedge d\omega_2 = d\omega' \wedge \omega_2. \quad (13)$$

Поэтому

$$(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega' \wedge \omega_2). \quad (14)$$

Утверждение доказано.

Согласно этому утверждению внешнее произведение форм корректно задает умножение в $H^*(M^n)$. Мы получаем, таким образом, кольцо когомологий многообразия M^n . Если $\omega_1 \in H^p(M^n)$, $\omega_2 \in H^q(M^n)$, то произведение $\omega_1 \omega_2$ лежит в пространстве $H^{p+q}(M^n)$. Это произведение обладает следующим свойством косокоммутативности:

$$\omega_2 \omega_1 = (-1)^{pq} \omega_1 \omega_2. \quad (15)$$

Поясним геометрический смысл групп гомологий; точные определения дадим в следующих параграфах.

Если M^n — произвольное многообразие, и ω — замкнутая форма степени k , то определены ее «интегралы по циклам». Это можно понимать, например, так. Пусть M^k — замкнутое ориентированное k -мерное многообразие. Под «циклом» в многообразии M^n мы понимаем пока гладкое отображение $f: M^k \rightarrow M^n$, т. е. пару (M^k, f) .

О п р е д е л е н и е 2. Периодом формы ω по циклу (M^k, f) мы назовем интеграл $\int_{M^k} f^* \omega$.

Пусть N^{k+1} — произвольное ориентированное многообразие с краем $M^k = \partial N^{k+1}$. Край — это замкнутое ориентированное многообразие (быть может, состоящее из нескольких кусков). Под «пленкой» будем понимать отображение $F: N^{k+1} \rightarrow M^n$. Имеет место следующая

Т е о р е м а 3. а) Для любого цикла (M^k, f) период точной формы $\omega = d\omega'$ равен нулю.

б) Если цикл (M^k, f) является границей пленки (N^{k+1}, F) , где M^k — граница N^{k+1} и $F|_{M^k} = f$, то период любой замкнутой формы по такому циклу (M^k, f) равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Если $\omega = d\omega'$, то по формуле Стокса мы имеем

$$\int_{M^k} f^* \omega = \int_{M^k} f^* (d\omega') = \int_{M^k} d(f^* \omega') = \int_{\partial M^k} f^* (\omega') = 0, \quad (16)$$

так как многообразие M^k не имеет границы.

б) Если M^k — граница N^{k+1} (с учетом ориентаций), и $F|_{M^k} = f$, то имеем по формуле Стокса:

$$\int_{M^k} f^* \omega = \int_{N^{k+1}} dF^* (\omega) = \int_{N^{k+1}} F^* (d\omega) = 0. \quad (17)$$

Теорема доказана.

Приведем без доказательства важный факт: если периоды замкнутой формы по всем циклам равны нулю, то форма является точной (см. ниже § 14).

П р и м е р. Если $M^n = S^n$ — сфера, то $H^*(S^n) = 0$ при $k \neq 0, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $k > n$, то утверждение очевидно по определению. Если $0 < k < n$ и (M^k, f) — любой цикл, то по теореме Сарда ([1], ч. II, § 10) образ $f(M^k)$ не покрывает хотя бы одной точки $Q \in S^n$. Поэтому цикл (M^k, f) фактически лежит в $R^n = S^n \setminus Q$. Мы уже знаем (лемма Пуанкаре), что в R^n любая форма точна. Поэтому все периоды равны нулю при $0 < k < n$. Следовательно, $H^*(S^n) = 0$ при $0 < k < n$.

Другой вывод этого факта можно получить из рассуждения, аналогичного вычислению когомологий окружности S^1 (выше). Используя группу движений $SO(n+1)$ на сфере S^n , можно свести любой класс когомологий к инвариантной относительно $SO(n+1)$ замкнутой форме на сфере S^n . Инвариантная форма ω определяется значением в одной точке сферы и в этой точке должна быть инвариантна относительно стационарной группы $SO(n) \subset SO(n+1)$. Таких форм ω нет, кроме размерностей нуль и n (проверьте!).

Вычислим аналогичным методом когомологии групп Ли и симметрических пространств.

Напомним (см. [1], ч. II, § 6), что однородное пространство M группы G с группой изотропии H называется симметрическим, если в группе G задана «инволюция» — т. е. автоморфизм $I: G \rightarrow G$, $I^2 = 1$ такой, что $I|_H = 1$ (точки подгруппы H неподвижны относительно автоморфизма I). При этом уравнение $I(x) = x$ для x близких к единице задает только элементы из подгруппы H .

На таком однородном многообразии M определяется «симметрия» s_x относительно любой точки x , где $s_x^2 = 1$. Отображение s_x многообразия M в себя задается так: пусть $g(x)$ — любая точка из M ; полагаем

$$g(x) \rightarrow s_x(g(x)) = I(g(x)); \quad s_x(x) = x \quad (\text{при } g = 1); \quad (18)$$

g — любой элемент из группы G , действующей на M .

Отображение s_x для любой точки x определено корректно, причем $(s_x)_*$ является отражением касательного пространства в точке x относительно начала координат (см. [1], ч. II, § 6). В частности, каждая компактная группа Ли G является симметрическим пространством группы $G \times G$. Действие группы $G \times G$ определяется так:

$$T_{(g, h)}(x) = gxh^{-1}. \quad (19)$$

Инволюция H имеет вид: $I(g, h) = (h, g)$. Подгруппа H — это диагональ $\{(g, g)\}$. Симметрия s_x относительно единицы группы G , $x = e$ имеет вид

$$s_x(g) = g^{-1}. \quad (19')$$

На любом однородном пространстве выделены инвариантные дифференциальные формы такие, что $g^*\omega = \omega$, g — любой элемент из G .

Дифференциал $d\omega$ инвариантной формы снова является инвариантной формой:

$$g^*d\omega = dg^*\omega = d\omega. \quad (20)$$

Произведение $\omega_1 \wedge \omega_2$ двух инвариантных форм также инвариантно:

$$g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (21)$$

Поэтому определено кольцо инвариантных форм однородного пространства M . Оказывается, для любого однородного пространства компактной связной группы Ли кольцо когомологий может быть вычислено только с помощью инвариантных форм. При этом для симметрических пространств имеет место более сильное утверждение:

Теорема 4. Пусть M — компактное симметрическое пространство связной компактной группы Ли G . Тогда:

- а) любая инвариантная форма на M замкнута;
- б) любая замкнутая форма на M когомологична инвариантной;
- в) инвариантная (ненулевая) форма никогда не когомологична нулю.

Доказательство. а) Пусть ω — инвариантная форма ранга k . Рассмотрим форму $s_x^*\omega = \tilde{\omega}$. Покажем, что форма $\tilde{\omega}$ также инвариантна. В силу равенства (18) будем иметь:

$$s_x T_g = T_{I_g} s_x \quad (T_g \leftrightarrow g). \quad (22)$$

Действительно, если $y = T_h(x)$, то

$$T_{I_g} s_x T_h(x) = T_{I_g} T_{I_h}(x) = T_{I(g h)}(x),$$

и

$$s_x T_g T_h(x) = s_x T_{gh}(x),$$

$$s_x T_{gh}(x) = T_{I(gh)}(x) \leftrightarrow s_x T_g(y) = T_{I_g} s_x(y).$$

Тогда

$$T_g^* \tilde{\omega} = T_g^* s_x^* \omega = (s_x T_g)^* \omega = s_x^* T_{I_g}^* \omega = \tilde{\omega},$$

т. е. форма $\tilde{\omega}$ инвариантна.

Так как s_x определяет отражение на касательном пространстве в точке x , то $\tilde{\omega}|_x = (-1)^k \omega|_x$.

Так как формы $\tilde{\omega}$ и ω инвариантны, то последнее равенство выполняется для любой точки x :

$$\tilde{\omega} = (-1)^k \omega. \quad (23)$$

Поэтому $d\tilde{\omega} = (-1)^k d\omega$. Но формы $d\tilde{\omega}$ и $d\omega$ ранга $k+1$ также инвариантны, причем $s_x^* d\omega = d\tilde{\omega}$.

Поэтому

$$d\tilde{\omega} = (-1)^{k+1} d\omega \quad (24)$$

в силу тех же рассуждений, что и выше (ранг этих форм равен $k+1$). Значит $d\omega = 0$, первая часть теоремы доказана.

б) Пусть форма ω на многообразии M замкнута: $d\omega = 0$. На группе G в силу компактности существует инвариантная метрика (метрика Киллинга) (см. [1], ч. I, § 24 и ч. II, § 8). Эта метрика определяет инвариантный элемент объема, который мы будем обозначать через $d\mu(g)$:

$$d\mu(hg) = d\mu(g). \quad (25)$$

Нормируем элемент объема на группе G так, чтобы объем всей группы был бы равен 1:

$$\int_G d\mu(g) = 1. \quad (26)$$

Определим по форме ω форму $\tilde{\omega}$, полагая

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g). \quad (27)$$

Проверим, что форма $\tilde{\omega}$ инвариантна и когомологична форме ω . Вычислим форму $T_h^* \tilde{\omega}$. Будем иметь:

$$T_h^* \tilde{\omega} = \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(g) = \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(hg) = \int_G T_g^* \omega d\mu(g) = \tilde{\omega}, \quad (28)$$

где мы положили $g' = hg$, — такая замена переменных гладкая и обратимая.

Итак, форма $\tilde{\omega}$ инвариантна. Покажем, что формы $\tilde{\omega}$ и ω когомологичны. Отображение T_g многообразия M в себя гомотопно тождественному. Действительно, пусть $g(t)$ — кривая в группе G , соединяющая точку g с единицей группы (напомним, что группа G связна). Тогда $T_{g(t)}$ — искомая гомотопия. Поэтому формы $T_{g(t)}^* \omega$ и ω когомологичны в силу теоремы 1: $T_{g(t)}^* \omega \sim \omega$. Следовательно,

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g) \sim \int_G \omega d\mu(g) = \omega \int_G d\mu(g) = \omega. \quad (29)$$

Вторая часть доказана.

в) Докажем теперь, что инвариантная форма на компактном симметрическом пространстве не может быть когомологичной нулю (если она ненулевая). Вспомним, что на многообразии M можно ввести риманову метрику (h_{ij}) , инвариантную относительно действия группы G (см. [1], ч. II, § 8). Риманова метрика на многообразии определяет скалярное произведение форм на этом многообразии. Скалярный квадрат формы ω равен

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega. \quad (30)$$

Эта величина всегда больше нуля при $\omega \neq 0$. Действительно, если $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, то

$$\int \omega \wedge * \omega = \int h^{i_1 i_1} \dots h^{i_k i_k} a_{i_1 \dots i_k} a_{i_1 \dots i_k} \sqrt{h} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n > 0$$

(здесь h^{ij} — матрица, обратная к h_{ij} , $h = \det(h_{ij})$, $n = \dim M$).

Пусть ω — инвариантная форма. В силу инвариантности метрики (h_{ij}) все операторы T_g^* коммутируют с оператором $*$. Поэтому форма $*\omega$ тоже инвариантна, а значит, замкнута: $d*\omega = 0$.

Допустим, $\omega = d\omega'$. Тогда $d(\omega' \wedge *\omega) = d\omega' \wedge *\omega \pm \omega' \wedge d*\omega = \omega' \wedge *\omega$. Поэтому в силу формулы Стокса получаем

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge *\omega = \int_M d(\omega' \wedge *\omega) = 0. \quad (31)$$

Значит, форма ω есть тождественный нуль. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь примеры.

Пример 1. Тор $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$, где Γ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^n$, порожденная n линейно независимыми векторами. Тор является компактной абелевой группой Ли.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Все формы вида $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ — это инвариантные (относительно сдвигов) формы на $\mathbb{R}^n$. Поэтому они определяют инвариантные формы на торе T^n . Если форма $\omega = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ на торе инвариантна, то это означает, что

$$a_{i_1 \dots i_k}(x+y) = a_{i_1 \dots i_k}(x), \quad (32)$$

т. е. коэффициенты формы ω постоянны:

$$a_{i_1 \dots i_k} = \text{const}. \quad (33)$$

Итак, любая инвариантная форма на T^n есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами внешних произведений форм $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$.

Вывод. Кольцо когомологий тора $H^*(T^n)$ есть внешняя алгебра $\Lambda(e_1, \dots, e_n)$ с образующими $e_1, \dots, e_n$ степени единица. Здесь e_i — класс когомологий формы dx^i .

Пример 2. Компактная группа Ли. Инвариантные формы на G — это двусторонние инвариантные дифференциальные формы на группе (относительно левых и правых сдвигов).

Рассмотрим сначала левоинвариантные формы на группе G . Приведем пример векторнозначной левоинвариантной 1-формы, принимающей значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G : $\omega(g) = g^{-1}dg$. Для матричной группы G , где $g = (g_{ik})$, $dg = (dg_{ik})$ — это матрица с компонентами dg_{ik} , ω — это тоже матрица из 1-форм, $\omega = (\omega_{ik})$.

Другая конструкция этой же формы ω не использует матричную реализацию группы и пригодна поэтому для любой группы G . Пусть вектор ξ касается группы G в некоторой ее точке g . Подействовав на ξ левым сдвигом $(L_g^{-1})_*$, получим вектор из касательного пространства в единице группы, т. е. из алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Каждая компонента формы ω левоинвариантна:

$$\omega(hg) = g^{-1}h^{-1}d(hg) = g^{-1}dg = \omega(g). \quad (34)$$

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^N$ — базис в пространстве левоинвариантных 1-форм. Для матричной группы в качестве форм θ^i можно взять компоненты формы $\omega = (\omega_{ik}) = g^{-1}dg$, выбирая среди них линейно независимые. Например, для группы $G = SO(n)$, где матрица (ω_{ik}) кососимметрична, в качестве базиса можно взять формы ω_{ik} , где $i < k$.

Лемма 2. Число N , т. е. размерность пространства левоинвариантных 1-форм, равно размерности группы.

Доказательство. Любая левоинвариантная 1-форма θ полностью определяется своим значением на касательном пространстве в единице группы, причем это значение может быть любым. Лемма доказана.

Следствие. Пространство левоинвариантных 1-форм совпадает с пространством $\mathfrak{g}^*$ всех линейных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

Здесь алгебра Ли рассматривается как касательное пространство в единице группы.

Лемма 3. Любая левоинвариантная k -форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}, \quad (35)$$

где $a_{i_1 \dots i_k}$ — константы.

Доказательство. В силу леммы 2 в единице группы форму ω можно представить в виде:

$$\omega(e) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1}(e) \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}(e). \quad (36)$$

В силу левоинвариантности форм ω и θ^i равенство (36) справедливо в любой точке группы. Лемма доказана.

Следствие. Алгебра левоинвариантных форм на группе Ли G изоморфна внешней алгебре $\Lambda(g^*)$ над пространством g^* линейных функций на алгебре Ли g . Другими словами, эта алгебра совпадает с пространством кососимметрических полилинейных функций на алгебре Ли g .

Выясним, какие из левоинвариантных форм являются и правоинвариантными. Заметим, что при правых сдвигах на h^{-1} форма $\omega = g^{-1}dg$ преобразуется следующим образом:

$$\omega \mapsto (gh^{-1})^{-1} d(gh^{-1}) = h\omega h^{-1}.$$

Следовательно, справедлива

Лемма 4. Кососимметрическая полилинейная функция $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ из $\Lambda(g^*)$ отвечает правоинвариантной форме, если и только если верно равенство:

$$\varphi(hX_1h^{-1}, \dots, hX_kh^{-1}) = \varphi(X_1, \dots, X_k) \quad (37)$$

для любого элемента h из группы G .

Вывод. Кольцо когомологий связной компактной группы Ли G совпадает с кольцом $\Lambda_{\text{инв}}(g^*)$ полилинейных кососимметрических функций на алгебре Ли g , инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — означает форму Киллинга на алгебре Ли g группы G . Определим 3-линейную функцию $\Omega(X, Y, Z)$ на алгебре Ли g , полагая

$$\Omega(X, Y, Z) = \langle [X, Y], Z \rangle. \quad (38)$$

Эта форма кососимметрична в силу инвариантности формы Киллинга (см. [1], ч. I, § 24). Кроме того, в силу равенства $[hXh^{-1}, hYh^{-1}] = h[X, Y]h^{-1}$ форма Ω инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G . Поэтому справедливо

Утверждение 6. Группа $H^3(G)$ нетривиальна для любой компактной группы Ли G с невырожденной формой Киллинга (т. е. неабелевой группы).

Пример 3. Пусть M — симметрическое пространство группы G , H — группа изотропии. Фиксируя точку x в многообразии M , мы получаем отображение $G \rightarrow M$, где элемент группы g переходит в $p(g) = T_g(x)$. Вся подгруппа H (и только она) переходит в точку x . Если ω — некоторая форма на многообразии M , то определена форма $p^*\omega$ на группе G . Эта форма обра-

щается в нуль на касательном пространстве к подгруппе H . Любой правый смежный класс $\{gH\}$ по подгруппе H переходит в одну точку при отображении p . Поэтому форма $p^*\omega$ инвариантна относительно правых сдвигов на элементы из группы H .

Пусть ω — инвариантная форма на многообразии M . Тогда форма $p^*\omega$ на группе G левоинвариантна.

Теорема 5. Кольцо инвариантных дифференциальных форм на однородном пространстве M группы G с группой изотропии H изоморфно внешней алгебре $\Lambda_{\text{инв}}((g/h)^*)$ (здесь h — алгебра Ли подгруппы H), т. е. алгебре кососимметрических полилинейных функций на g , обращающихся в нуль на h , инвариантных относительно внутренних автоморфизмов на элементы из H .

Доказательство. Каждой инвариантной форме ω на M сопоставим форму $p^*\omega$ на группе G . Форма $p^*\omega$ левоинвариантна и обращается в нуль на h , поэтому определяет некоторый элемент из $\Lambda((g/h)^*)$. Форма $p^*\omega$ инвариантна и относительно правых сдвигов на элементы из группы H . В силу левоинвариантности для этого достаточно, чтобы форма $p^*\omega$ была инвариантна относительно внутренних автоморфизмов на элементы из группы H . Теорема доказана.

Пример 4. Вычислим кольцо когомологий комплексного проективного пространства:

$$CP^n = U(n+1)/U(1) \times U(n). \quad (39)$$

CP^n — компактное симметрическое пространство. Группа $U(n+1)$ также связна и компактна. Поэтому кольцо когомологий CP^n определяется через инвариантные дифференциальные формы.

Пусть $(z^0, \dots, z^n)$ — однородные координаты на CP^n , т. е. координаты на $C^{n+1} \setminus 0$, определенные с точностью до ненулевого комплексного множителя. Рассмотрим в C^{n+1} вещественную дифференциальную 2-форму

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_k dz^k \wedge d\bar{z}^k. \quad (40)$$

Ограничение этой формы на сферу $S^{2n+1}: \sum_{k=0}^n |z^k|^2 = 1$ также обозначим через Ω . Форма Ω инвариантна относительно группы $U(n+1)$. Покажем, что эта форма получается из некоторой формы ω на $CP^n: \Omega = p^*\omega$, где $p: S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ — естественная проекция.

Нужно проверить, что при преобразованиях

$$z^k \rightarrow e^{i\varphi} z^k, \quad dz^k \rightarrow e^{i\varphi} (dz^k + iz^k d\varphi), \quad (41)$$

$$\bar{z}^k \rightarrow e^{-i\varphi} \bar{z}^k, \quad d\bar{z}^k \rightarrow e^{-i\varphi} (d\bar{z}^k - i\bar{z}^k d\varphi) \quad (41')$$

Форма Ω переходит в себя. На сфере S^{2n+1} , где $\sum_{k=0}^n z^k \bar{z}^k = 1$, мы имеем: $\sum z^k dz^k + \sum \bar{z}^k d\bar{z}^k = 0$; поэтому

$$\frac{i}{2} \sum dz^k \wedge d\bar{z}^k \rightarrow \frac{i}{2} \sum dz^k \wedge d\bar{z}^k + i d\varphi \wedge \sum (z^k d\bar{z}^k + \bar{z}^k dz^k) =$$

$$= \frac{i}{2} \sum dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Итак, мы получаем инвариантную 2-форму ω на симметрическом пространстве CP^n . Ее внешние степени ω^k все отличны от нуля при $k \leq n$, так как отличны от нуля соответствующие степени формы Ω (проверьте!).

Вывод. В алгебре когомологий $H^*(CP^n)$ комплексного проективного пространства CP^n содержится алгебра многочленов $C[\omega]$ от образующей ω размерности 2, причем $\omega^{n+1} = 0$.

В § 4 будет показано, что других элементов в $H^*(CP^n)$ нет.

§ 2. Гомологии алгебраических комплексов

Определение 1. Аддитивно записанная абелева группа C называется комплексом (комплексом цепей или коцепей), если:

1) Группа C представлена в виде прямой суммы $C = \sum_{k \geq 0} C_k$ своих подгрупп C_k размерности или степени k (говорят, что группа C градуирована).

2) Задан линейный оператор (гомоморфизм) $\partial: C_k \rightarrow C_{k+1}$ такой, что $\partial\partial \equiv 0$; гомоморфизм ∂ повышает (или понижает) размерность на единицу одновременно для всех k : $\partial(C_k) \subset C_{k+1}$ [или $\partial(C_k) \subset C_{k-1}$]. Если $\partial C_k \subset C_{k+1}$, то говорят о комплексе «коцепей». Если $\partial C_k \subset C_{k-1}$, то говорят о комплексе «цепей».

Определение 2. k -мерной группой гомологий $H_k(C)$ комплекса цепей C называется факторгруппа группы k -мерных циклов $Z_k = \text{Ker } \partial$ (т. е. $\partial Z_k = 0$) по подгруппе границ $B_k = \text{Im } \partial = \partial C_{k+1}$ ($B_k \subset Z_k$):

$$H_k(C) = Z_k/B_k. \quad (1)$$

Группой когомологий комплекса коцепей называется факторгруппа коциклов $Z^k = \text{Ker } \partial$ по кограницам $B^k = \partial C_{k-1}$:

$$H^k(C) = Z^k/B^k. \quad (2)$$

Полной группой гомологий $H_*(C)$ или когомологий $H^*(C)$ называется прямая сумма: $H_*(C) = \sum_{k \geq 0} H_k(C)$, или $H^*(C) = \sum_{k \geq 0} H^k(C)$.

Пример 1. С каждым многообразием M^n связан комплекс дифференциальных форм $C = \sum_{k=0}^n C_k$ на этом многообразии. Здесь C_k — это все (гладкие) k -формы на многообразии M^n ; оператор $\partial: C_k \rightarrow C_{k+1}$ — это оператор внешнего дифференцирования $d = \partial$. Гомологии такого комплекса назывались в § 1 когомологиями многообразия.

Пример 2. На группе Ли, или на симметрическом пространстве, определен комплекс инвариантных дифференциальных форм. Все такие формы замкнуты, поэтому оператор $\partial = d$ здесь тривиальный — нулевой. Из теоремы 1.4 вытекает, что гомологии такого комплекса совпадают (для симметрического пространства) с гомологиями комплекса всех дифференциальных форм.

В следующих параграфах встретится ряд примеров комплексов.

Пусть даны два комплекса $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$, $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

Определение 3. Сохраняющий градуировку гомоморфизм $f: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$ называется гомоморфизмом комплексов, если он перестановочен с действием дифференциалов:

$$f\partial^{(1)} = \partial^{(2)}f, \quad f(C_k^{(1)}) \subset C_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Имеет место простое

Утверждение 1. Гомоморфизм f алгебраических комплексов индуцирует гомоморфизм f групп гомологий:

$$f: H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \rightarrow H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Доказательство. Гомоморфизм f переводит циклы $Z_k^{(1)}$ в циклы $Z_k^{(2)}$, и границы $B_k^{(1)}$ — снова в границы $B_k^{(2)}$ для любого k . Поэтому он корректно определяет гомоморфизм групп гомологий. Утверждение доказано.

Например, гладкое отображение многообразий $f: M \rightarrow N$ определяет отображение f^* комплексов дифференциальных форм на этих многообразиях, действующее в обратную сторону:

$$f^*: C(N) \rightarrow C(M).$$

Это отображение линейно и перестановочно с дифференциалом: $f^*d\omega = df^*\omega$ для любой формы ω . Поэтому f^* является гомоморфизмом комплексов дифференциальных форм.

Определение 4. Пусть $f: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$, $g: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$ — два гомоморфизма алгебраических комплексов. Эти гомоморфизмы называются (алгебраически) гомотопными, если задан гомоморфизм $D: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$ такой, что

$$D\partial^{(1)} \pm \partial^{(2)}D = f - g. \quad (5)$$

Если операторы $\partial^{(1)}$, $\partial^{(2)}$ повышают (понижают) градуировку, то отображение D понижает (повышает) градуировку:

$$D(C_k^{(1)}) \subset C_{k-1}^{(2)} \text{ или } D(C_k^{(2)}) \subset C_{k+1}^{(1)}. \quad (6)$$

Утверждение 2. Гомотопные отображения комплексов индуцируют одинаковые гомоморфизмы групп гомологий:

$$f = g: H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \rightarrow H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}). \quad (7)$$

Доказательство. Если $c_k \in C_k^{(1)}$ — цикл, $\partial^{(1)} c_k = 0$, то:

$$f(c_k) - g(c_k) = D\partial^{(1)} c_k \pm \partial^{(2)} Dc_k = \pm \partial^{(2)} Dc_k,$$

т. е. $f(c_k) \sim g(c_k)$ в группе гомологий $H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)})$. Утверждение доказано.

Пример алгебраической гомотопии и был построен при доказательстве гомотопической инвариантности когомологий в теореме 1.1. Другие примеры встретятся в следующих параграфах.

Определение 5. Пусть b_k — ранг группы $H_k(C, \partial)$. Альтернированная сумма вида

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rang } H_k \quad (8)$$

называется эйлеровой характеристикой комплекса (C, ∂) .

Утверждение 3. Эйлерова характеристика комплекса (C, ∂) равна следующему числу:

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rang } C_k. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть z_k — ранг группы циклов Z_k , β_k — ранг группы границ B_k . Тогда мы будем иметь для этих рангов соотношения:

$$b_k = z_k - \beta_k, \quad (10)$$

$$\beta_k = \text{rang } C_{k+1} - z_{k+1} \quad (11)$$

(где оператор ∂ понижает градуировку). Поэтому

$$b_k = z_k + z_{k+1} - \text{rang } C_{k+1}$$

и

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k = z_0 + \sum_{k \leq 0} (-1)^{k+1} \text{rang } C_{k+1}.$$

Утверждение доказано, так как $z_0 = \text{rang } C_0$ (очевидно, доказательство верно и в том случае, когда оператор ∂ повышает градуировку на 1).

Пусть G — произвольная абелева группа (записанная аддитивно). Определен комплекс $C \otimes G = \sum_{k \geq 0} C_k \otimes G$ — комплекс цепей с коэффициентами в группе G . [Напомним, что тензорное произведение двух абелевых групп $A \otimes B$ состоит из всевозможных конечных сумм вида $\sum a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, причем для символа $\otimes$ должны выполняться следующие требования:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b,$$

$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2.$$

Отсюда сразу вытекает полезное соотношение: $ma \otimes b = a \otimes mb$, где m — любое целое число.

З а д а ч а 1. Доказать, что для любой группы G : $G \otimes Z = G$. Вычислить тензорное произведение конечных циклических групп $Z_m \otimes Z_n$. Доказать, что тензорное произведение любой конечной абелевой группы на группу вещественных (или рациональных) чисел равно нулю.]

Оператор ∂ на цепях вида $c_k \otimes g$, $c_k \in C_k$, $g \in G$, действует так: $\partial(c_k \otimes g) = \partial c_k \otimes g$. На всю группу $C \otimes G$ он продолжается линейно. Соотношение $\partial\partial = 0$ здесь очевидно. Гомологии комплекса $C \otimes G$ называются также гомологиями комплекса C с коэффициентами в группе G и обозначаются так:

$$H_k(C; G) \equiv H_k(C \otimes G).$$

Пусть G — аддитивно записанная абелева группа и (C, ∂) — комплекс цепей. Введем сопряженный комплекс коцепей — линейных форм (гомоморфизмов) C^* со значением в G , обозначаемый в алгебре через $\text{Hom}(C, G)$. Мы имеем естественное разложение в сумму

$$C^* = \sum_{k \geq 0} C_k^* \quad (12)$$

(C_k^* — это линейные формы на C_k) и граничный оператор ∂^* , сопряженный к ∂ :

$$\partial^*: C_k^* \rightarrow C_{k+1}^*, \quad \partial: C_k \rightarrow C_{k-1},$$

где

$$(\partial^* x, c) = (x, \partial c); \quad c \in C, \quad x \in C^*. \quad (13)$$

Имеем: $\partial^* \partial^* \equiv 0$. Группы когомологий $H_k(C^*, \partial^*)$ обозначаются обычно через $H^k(C; G)$ и называются когомологиями комплекса C со значением в G .

Пусть $G = k$ — поле (например, действительные числа $k = \mathbb{R}$, комплексные $k = \mathbb{C}$, рациональные $k = \mathbb{Q}$ или конечное поле

$k = Z_p$ из p элементов, где p — простое) и C — комплекс конечномерных линейных пространств C_k над полем k . Имеет место

Теорема 1. *Линейные пространства $H^k(C; k)$ и $H_k(C)$ взаимно сопряжены; в частности, они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Будем считать, что оператор ∂ понижает градуировку. Докажем, что элемент c^k из C_k^* является коциклом в комплексе C^* , если и только если $(c^k, B_k) = 0$, где $B_k \subset C_k$ — подгруппа границ. Действительно, для любого элемента $\tilde{c}_{k+1}$ из группы C_{k+1} мы будем иметь: $0 = (\partial^* c^k, \tilde{c}_{k+1}) = (c^k, \partial \tilde{c}_{k+1})$. Обратно, если $(c^k, \partial \tilde{c}_{k+1}) = 0$ для любого элемента $\tilde{c}_{k+1}$ из C_{k+1} , то $\partial^* c^k$ принимает нулевые значения на любом таком элементе $\tilde{c}_{k+1}$.

Итак, мы получили, что пространство Z^* коциклов комплекса C^* совпадает с пространством линейных форм, обращающихся в нуль на подпространстве границ B_k . В силу конечномерности каждого пространства C_k комплекс $(C^*)^*$ совпадает с комплексом C . Поэтому мы имеем: пространство циклов Z_k совпадает с пространством линейных форм на C_k^* , обращающихся в нуль на подпространстве границ B_k^* . Другими словами, B_k^* — это линейные формы, обращающиеся в нуль на Z_k .

По доказанному, каждый элемент c^k из C_k^* , где $\partial^* c^k = 0$, определяет линейную форму на гомологиях $H_k(C)$. Кроме того, размерности пространств $H^k(C; k)$ и $H_k(C)$ совпадают. Теорема доказана.

Определим операцию тензорного произведения $C = C^{(1)} \otimes C^{(2)}$ двух комплексов $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$ и $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

Напомним, что тензорным произведением $A \otimes B$ двух линейных пространств A и B с базисами $(a_1, \dots, a_s)$, $(b_1, \dots, b_p)$ называется пространство с базисом $a_i \otimes b_j$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, p$, и условием $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \otimes b = \lambda_1 a_1 \otimes b + \lambda_2 a_2 \otimes b$ и $a \otimes (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 a \otimes b_1 + \lambda_2 a \otimes b_2$. (Здесь λ_1, λ_2 — скаляры. Возможно, что речь идет о любых аддитивно записанных абелевых группах A и B ; тогда λ — это только целые числа (см. с. 25)).

Полагаем $C = \sum C_k$, где

$$C_k = (C^{(1)} \otimes C^{(2)})_k = \sum_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}, \quad (14)$$

$$\partial(c_p^{(1)} \otimes c_q^{(2)}) = (\partial^{(1)} c_p^{(1)}) \otimes c_q^{(2)} + (-1)^p c_p^{(1)} \otimes (\partial^{(2)} c_q^{(2)}). \quad (15)$$

Легко проверить, что $\partial \partial = 0$.

Теорема 2. Пусть $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — комплексы линейных пространств над любым полем k . Для гомологий тензорного произведения имеет место формула

$$H_k(C^{(1)} \otimes C^{(2)}) = \sum_{p+q=k} H_p(C^{(1)}) \otimes H_q(C^{(2)}) \quad (16)$$

(будут важны случаи $k = R, C, Q, Z_p$).

Для доказательства теоремы докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $C = \sum_{n \geq 0} C_n$ — комплекс линейных пространств над полем k . Тогда в каждом пространстве C_n можно выбрать канонический базис $(x_{n,i}, y_{n,i}, h_{n,i})$, в котором действие оператора ∂ имеет вид

$$\partial x_{n,i} = y_{n-1,i}, \quad \partial y_{n,i} = 0, \quad \partial h_{n,i} = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Из формул (17) видно, что векторы $y_{n,i}$ — это границы, векторы $h_{n,i}$ — циклы, не являющиеся границами и тем самым дающие базис в гомологиях $H_n(C)$; наконец, векторы $x_{n,i}$ — базис в пространстве цепей, не являющихся циклами. Поэтому нужный нам базис легко строится по индукции, начиная с пространства C_0 .

Доказательство теоремы. Выберем канонические базисы $(x_p^{(1)}, y_p^{(1)}, h_p^{(1)})$ и $(x_q^{(2)}, y_q^{(2)}, h_q^{(2)})$ во всех пространствах $C_p^{(1)}$ и $C_q^{(2)}$ (индексы, нумерующие базисные векторы одного пространства, будем опускать). Построим канонический базис для пространства $C_k = \sum_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}$. Первая группа векторов (не циклы):

$$x_{pq} = x_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)}; \quad \alpha_{pq} = \frac{1}{2} [x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)} + (-1)^{p-1} y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)}],$$

$$\alpha_{pq} = x_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \quad \beta_{pq} = (-1)^p h_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)} \quad (18)$$

(всюду в этих формулах, а также ниже, $p + q = k$).

Базис границ:

$$b_{pq} = y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)} - (-1)^{p+1} x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)};$$

$$y_{pq} = y_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; \quad \gamma_{pq} = y_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \quad \delta_{pq} = h_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}. \quad (19)$$

Векторы (18), (19) линейно независимы (проверьте!), и чтобы получить базис в пространстве C_k , нужно добавить еще векторы вида $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$, $p + q = k$. Вычислим действие оператора ∂ в построенном базисе. Из формул (15), (17) сразу получаем, что

$$\partial x_{pq} = b_{pq-1}, \quad \partial \alpha_{pq} = y_{p-1,q}, \quad \partial \alpha_{pq} = \gamma_{p-1,q}, \quad \partial \beta_{pq} = \delta_{pq-1},$$

$$\partial b_{pq} = \partial y_{pq} = \partial \gamma_{pq} = \partial \delta_{pq} = \partial (h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}) = 0,$$

т. е. построенный базис действительно канонический. Таким образом, векторы $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$ с $p + q = k$ дают базис в пространстве $H_k(C^{(1)} \otimes C^{(2)})$, что и требовалось доказать.

§ 3. Симплициальные комплексы. Их гомологии и когомологии. Классификация двумерных замкнутых поверхностей

Изложим теперь другой подход к определению и изучению групп гомологий и когомологий, который сильно расширяет возможности их применения.

Определим n -мерный симплекс. 0-мерный симплекс — это точка $[\alpha_0]$; 1-мерный симплекс — это отрезок $[\alpha_0\alpha_1]$; 2-мерный симплекс — это треугольник $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$; 3-мерный симплекс — это тетраэдр $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ (рис. 2).

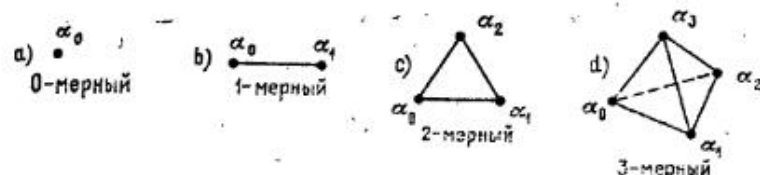


Рис. 2. Симплексы.

По индукции, если n -мерный симплекс $\sigma^n = [\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n]$ определен и лежит в n -мерном пространстве R^n , то для построения $(n+1)$ -мерного симплекса надо взять новую вершину α_{n+1} вне этой гиперплоскости $R^n \subset R^{n+1}$ и рассмотреть совокупность всех точек, лежащих на отрезках, соединяющих эту новую вершину α_{n+1} с точками симплекса $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$. Полученное тело и будет $(n+1)$ -мерным симплексом $[\alpha_0 \dots \alpha_{n+1}] = \sigma^{n+1}$.

Более общо, n -мерным симплексом мы будем называть выпуклую оболочку $(n+1)$ -й точки (вершины) евклидова пространства.

Грани n -мерного симплекса $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$ — это симплексы, натянутые на вершины $\{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}\}$, $[\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n]$, ..., $[\alpha_1 \dots \alpha_n]$. Таким образом, i -я грань получается удалением i -й вершины α_i из набора $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$ и противоположна этой вершине: i -я грань $\sigma_{(i)}^{n-1}$ симплекса σ^n есть

$$[\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n] = \sigma_{(i)}^{n-1} \quad (1)$$

(i -я вершина удалена).

Грани меньшей размерности формально получаются из симплекса $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$ удалением какого-то числа любых вершин.

Определение 1. Ориентированная граница симплекса $\sigma^n = [\alpha_0 \dots \alpha_n]$ есть формальная линейная комбинация его граней вида:

$$\partial \sigma^n = \partial [\alpha_0 \dots \alpha_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}. \quad (2)$$

Например, для 0-, 1- и 2-мерных симплексов мы имеем:

$$\partial [\alpha_0] = 0, \quad (3)$$

$$\partial [\alpha_0\alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0], \quad (4)$$

$$\partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1]. \quad (5)$$

Из рис. 2 видно, что грани входят с правильными знаками.

Лемма 1. Для n -мерного симплекса имеет место формула

$$\partial \partial [\alpha_0 \dots \alpha_n] = 0. \quad (6)$$

Доказательство состоит в прямом вычислении. Например, для $n = 2$ мы имеем

$$\partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1],$$

$$\partial \partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = \{[\alpha_2] - [\alpha_1]\} - \{[\alpha_2] - [\alpha_0]\} + \{[\alpha_1] - [\alpha_0]\} = 0.$$

Для всех n вычисление аналогично: $\partial \partial \sigma^n = \partial \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1} \right)$;

в эту сумму грань $\sigma_{(i/j)}^{n-2}$ (вершины α_i, α_j удалены) входит дважды — в границу $\partial \sigma_{(i)}^{n-1}$ и $\partial \sigma_{(j)}^{n-1}$ — с противоположными знаками.

Определение 2. Симплициальный комплекс — это совокупность симплексов произвольной размерности, обладающая свойствами:

1) вместе с любым симплексом его грани всех размерностей принадлежат этой совокупности;

2) два симплекса могут пересекаться (иметь общие точки) только по целой грани какой-то размерности, и при этом только по одной грани.

Конечный симплициальный комплекс состоит из конечного числа симплексов.

Перенумеруем как-то все вершины конечного симплициального комплекса $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$. Тогда r -мерные симплексы $[\alpha_{i_0}\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}]$ определяются некоторыми подмножествами вершин в данной нумерации.

Пусть G — любая коммутативная группа, где групповой закон записывается как сложение $(+)$. Цепи размерности k в симплициальном комплексе — это формальные конечные линейные комбинации вида $c_k = \sum_i g_i \sigma_i$, где σ_i — различные k -мерные симплексы, записанные в данной нумерации вершин комплекса, g_i — произвольные элементы группы G . Сложение цепей определяется так:

если $c_k = \sum g_i \sigma_i$, $c'_k = \sum g'_i \sigma_i$, то $c_k + c'_k = \sum (g_i + g'_i) \sigma_i$. Цепи образуют абелеву группу.

Граница цепи ∂c_k — это цепь размерности $k-1$, определяемая формулой

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial \sigma_i. \quad (7)$$

Очевидна формула (по лемме 1): $\partial \partial c_k = 0$.

Циклы — это такие цепи c_k , что $\partial c_k = 0$. Циклы также образуют группу Z_k . Циклы, гомологичные нулю (ограничивающие), — это такие циклы c_k , что $c_k = \partial c_{k+1}$. Эти циклы образуют группу границ B_k .

О п р е д е л е н и е 3. Группой гомологий $H_k(M, G)$ симплициального комплекса M называется факторгруппа группы Z_k всех циклов размерности k по циклам B_k , гомологичным нулю (два цикла эквивалентны, если и только если $c'_k - c_k = \partial c_{k+1}$).

Интересны случаи $G = \mathbb{Q}$ (рациональные числа), $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ (целые числа), $G = \mathbb{Z}_2$ (вычеты по модулю 2) и вообще $G = \mathbb{Z}_m$ (вычеты по модулю m , особенно когда m — простое число и $\mathbb{Z}_m$ — поле). При $G = \mathbb{R}$ все $H_i(M, \mathbb{R})$ являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$. Размерность b_i пространства $H_i(M, \mathbb{R})$ называется i -м числом Бетти комплекса M .

Для конечного симплициального комплекса определяется эйлерова характеристика:

если γ_i — число симплексов размерности i в комплексе M , то эйлерова характеристика комплекса M равна

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть b_i — размерности пространств $H_i(M; \mathbb{R})$ (числа Бетти). Тогда имеет место равенство:

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i. \quad (9)$$

Доказательство. Группа i -мерных цепей C_i — это линейное пространство размерности γ_i . Поэтому доказательство вытекает из утверждения 2.3.

З а м е ч а н и е. Эйлерова характеристика $\chi(M)$ может быть определена (см. [1], ч. II, § 15) как сумма особенностей векторного поля (или гладкой функции). Мы получаем возможность вычислять $\chi(M)$, исходя из гомологий.

Определим теперь сопряженные объекты. k -мерная коцепь c^k — это линейная функция на k -мерных целочисленных цепях комплекса M со значениями в группе G . Таким образом, ко-

цепь c^k сопоставляет каждому k -мерному симплексу σ_i элемент $c^k(\sigma_i)$ из группы G , причем

$$c^k(a\sigma_{i1} + b\sigma_{i2}) = ac^k(\sigma_{i1}) + bc^k(\sigma_{i2}),$$

a, b — целые числа. Сумма таких линейных функций — снова коцепь, поэтому коцепи образуют группу.

Кограница δc^k любой коцепи c^k — это $(k+1)$ -мерная коцепь, определяемая равенством

$$\delta c^k(\sigma_i) = c^k(\partial \sigma_i) \quad (10)$$

(или $\delta = \partial^*$ в обозначениях § 2), где σ_i — любой симплекс размерности $k+1$. Заметим, что $\delta \delta = 0$. Действительно,

$$\delta \delta c^k(\sigma_i) = \delta c^k(\partial \sigma_i) = c^k(\partial \partial \sigma_i) = 0.$$

Коциклы — это коцепи c^k такие, что $\delta c^k = 0$. Коциклы, эквивалентные (когомологичные) нулю, имеют вид $c^k = \delta c^{k-1}$.

О п р е д е л е н и е 4. Группа когомологий $H^k(M; G)$ — это факторгруппа группы коциклов по подгруппе коциклов, эквивалентных нулю ($c^k \sim c'^k$, если $c^k - c'^k = \delta c^{k-1}$).

Комплекс коцепей сопряжен к комплексу симплициальных цепей. Для случая, когда $G = k$ — поле, из теоремы 2.1 мы получаем

С л е д с т в и е. Размерности пространств $H_i(M; k)$ и $H^i(M; k)$, где k — поле, совпадают.

Рассмотрим случай $G = \mathbb{Z}_m$ (вычеты mod m), особенно если $m = p$ — простое число, когда $G = \mathbb{Z}_p$ — поле. Пусть $x \in H_q(M; G)$ и $\bar{x}$ — целочисленная цепь, дающая цикл $x = \bar{x} \pmod{m}$. Мы имеем

$$\partial \bar{x} = m u, \text{ или } u = \frac{\partial \bar{x}}{m}$$

в целочисленных цепях. Если элемент $\bar{x}$ меняется в классе гомологий $x \in H_q(M, \mathbb{Z}_m)$, $\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \partial y + m z$, то мы получаем

$$\frac{\partial \bar{x}}{m} \rightarrow \frac{\partial \bar{x}}{m} + \frac{\partial \partial y}{m} + \partial z = \frac{\partial \bar{x}}{m} + \partial z = u + \partial z.$$

При этом $\partial u = 0$.

Таким образом, возникает корректно определенный однозначный гомоморфизм Бокштейна:

$$x \rightarrow \frac{\partial \bar{x}}{m}, \text{ где } \bar{x} \pmod{m} \sim x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m). \quad (11)$$

$$H_q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(M; \mathbb{Z}).$$

Аналогично, в когомологиях получим гомоморфизм

$$\bar{H}^q(M; Z_m) \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(M; Z). \quad (12)$$

Утверждение 1. Для любого элемента $x \in H_q(M; Z_m)$ $\delta_* x = 0$ в $H_{q-1}(M; Z)$, если и только если x получается из элемента $y \in H_q(M; Z)$ приведением (modulo m):

$$x = y \pmod{m} \leftrightarrow \delta_* x = 0.$$

Аналогично в когомологиях: $x = y \pmod{m} \leftrightarrow \delta_* x = 0$. (Здесь $x \in H^q(M; Z_m)$, $y \in H^q(M; Z)$.)

Доказательство. Если $x = y \pmod{m}$, то можно выбрать цепь $\bar{x}$ так, что $\partial \bar{x} = 0$ и $\partial_* x = \frac{\partial \bar{x}}{m} = 0$ в $H_{q-1}(M, Z)$.

Обратно, если $\delta_* x = 0$ в $H_{q-1}(M, Z)$, то $\frac{\partial \bar{x}}{m} = \partial z$ для некоторой цепи z . Полагаем $y = \bar{x} - mz$. Мы имеем $\partial y = 0$ и $y \pmod{m} = x$. Утверждение доказано.

Таким образом, знание ∂_* и δ_* позволяет распознать в когомологиях mod m образы целочисленных. Другое применение: образ $\delta_* H_q(M, Z_m)$ в группах $H_{q-1}(M, Z)$ выделяет элементы u , $u \in H_{q-1}(M, Z)$ такие, что $mu = 0$ (кручение).

Действительно, $\partial_*(mx) = m(\partial_* x) = 0$ по определению. Обратно, если $mv = 0$ для $v \in H_{q-1}(M, Z)$, то $mv = \partial \bar{x}$ для целочисленной цепи $\bar{x}$, и мы имеем элемент $x = \bar{x} \pmod{m}$ такой, что $x \in H_q(M, Z_m)$ и $\delta_* x = v$.

Пример. Для $M = \mathbb{R}P^2$ имеем $x \in H_2(\mathbb{R}P^2, Z_2) = Z_2$, $x \neq 0$. При этом $\delta_* x \neq 0$ в $H_1(\mathbb{R}P^2, Z) = Z_2$.

Задача 1. Для всех неориентируемых многообразий имеется цикл $[M^n] = x$ в группе $H_n(M^n, Z_2)$ такой, что $\delta_* x \neq 0$ и элемент $\delta_* x \in H_{n-1}(M^n, Z)$ порядка 2.

Для когомологий наоборот: имеем $u \in H^1(\mathbb{R}P^2, Z_2)$, где $\delta_* u \neq 0$ и имеет порядок 2 в $H^2(\mathbb{R}P^2, Z)$.

Пусть многообразие M^n разбито на симплексы и превращено в симплициальный комплекс. Тогда у него можно определить и вычислить группы гомологий и когомологий.

Гладкий симплекс σ^k размерности k — это дифференцируемое вложение симплекса (вместе с некоторой открытой окрестностью симплекса в σ^k в пространстве $\mathbb{R}^k$) в многообразие M^n . Мы будем считать многообразие *триангулированным*, если оно разбито в симплициальный комплекс с помощью гладких симплексов.

Сформулируем два важных факта (доказательство пункта А будет дано в § 6):

А. Группы гомологий и когомологий не зависят от триангуляции многообразия и гомотопически инвариантны.

В. Для $G = \mathbb{R}$ группы когомологий совпадают с теми, которые вводились через дифференциальные формы (см. § 14).

Поясним последнее утверждение. Пусть σ^k — гладкий k -мерный симплекс в многообразии M^n ; ω_k — дифференциальная форма степени k . Определен интеграл формы ω_k по симплексу σ^k :

$$\langle \omega_k, \sigma^k \rangle = \int_{\sigma^k} \omega_k. \quad (13)$$

Если $c_k = \sum_i r_i \sigma_i^k$ — цепь с вещественными коэффициентами, то можно определить интеграл формы по цепи c_k :

$$\langle \omega_k, c_k \rangle = \sum_i r_i \int_{\sigma_i^k} \omega_k. \quad (14)$$

В силу формулы Стокса (см. [1], ч. I, § 26) верно равенство:

$$\langle d\omega_k, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle \leftrightarrow \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (15)$$

Любая замкнутая форма ω , где $d\omega = 0$, определяет поэтому линейную функцию на классах симплициальных гомологий: если c_1, c_2 — гомологичные циклы, $c_1 = c_2 + \partial c'$, то

$$\langle \omega, c_1 \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle + \langle d\omega, c' \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle.$$

Любая точная форма ω , где $\omega = d\omega'$, обращается в нуль на любом цикле (проверьте).

Вывод. Каждый класс когомологий $H^k(M; \mathbb{R})$, определенных через дифференциальные формы, определяет линейную функцию на группе симплициальных гомологий $H_k(M; \mathbb{R})$.

Сформулированное выше утверждение В означает, что так получается любая линейная функция на группе $H_k(M; \mathbb{R})$ и нетривиальная (не точная) замкнутая форма всегда дает нетривиальную линейную форму на $H_k(M; \mathbb{R})$.

Пусть M^n — замкнутое связное многообразие. Легко видеть, что любая его триангуляция (разбиение на симплексы) обладает следующим свойством: любой симплекс размерности $n-1$ является гранью ровно двух n -мерных симплексов.

Теорема 2. Имеет место равенство

$$H_n(M^n; Z_2) = Z_2$$

(здесь Z_2 — группа из двух элементов — вычеты по модулю 2).

Доказательство. Рассмотрим цепь $z = \sum_i \sigma_i^n$, где суммирование ведется по всем n -мерным симплексам, причем их ориентация произвольная. Над полем Z_2 верно равенство цепей:

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^n \sigma_i^{n-1}, \quad (16)$$

где σ_i^{n-1} — грани симплекса σ^n . В сумме $dz = \sum_i d\sigma_i^n$ каждый $(n-1)$ -мерный симплекс встретится ровно два раза. Поэтому $dz = 0$. Ясно, что других ненулевых n -мерных циклов здесь нет. Теорема доказана.

Пусть теперь многообразие M^n ориентировано.

Утверждение 2. Для замкнутого связного ориентированного многообразия n -я группа гомологий $H_n(M^n; G)$ равна G (G — любая группа).

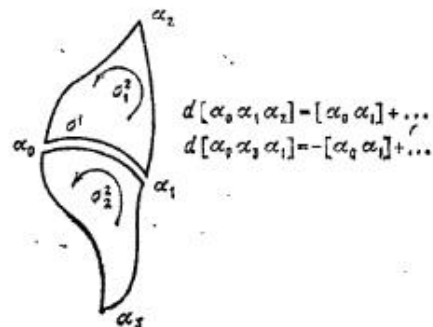


Рис. 3.

Доказательство.

В каждой точке многообразия M^n задам класс ориентации касательных реперов. Ориентируем n -мерные симплексы в соответствии с ориентацией этих реперов. Пусть симплексы σ_1^n и σ_2^n граничат по симплексу σ^{n-1} (см. рис. 3 для $n=2$). Этот симплекс входит в границы $d\sigma_1^n$ и $d\sigma_2^n$ с противоположными знаками. Следовательно, цепь $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ (сумма по

всем n -мерным симплексам) является циклом. Ясно, что любой другой n -мерный цикл имеет вид $z = g[M^n]$, где g — элемент из группы G . Поскольку n -мерных границ не бывает, то утверждение доказано.

Утверждение 3. Пусть $G = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел. Тогда для неориентируемого n -мерного связного замкнутого многообразия будем иметь:

$$H_n(M^n, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство. Любой n -мерный цикл должен иметь вид $z = \lambda \sum_i \sigma_i^n$, где $\lambda \neq 0$ — целое число, а симплексы σ_i^n подходящим образом ориентированы. Если симплексы σ_1^n и σ_2^n граничат по симплексу σ^{n-1} , то этот симплекс входит в $d\sigma_1^n$ и $d\sigma_2^n$ с разными знаками, если и только если симплексы σ_1^n и σ_2^n в многообразии M^n ориентированы одинаково (проверьте). Поэтому $dz = 0$, если и только если на всех симплексах σ_i^n можно выбрать единую ориентацию, т. е. если многообразие M^n ориентируемо. Утверждение доказано.

Следствие. Пусть $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ — сумма всех n -мерных симплексов неориентируемого многообразия M^n (образующая в группе $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$). Тогда

$$\partial_*[M_n] \neq 0 \text{ в группе } H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z}) \text{ и } 2\partial_*[M^n] = 0.$$

Перейдем теперь к триангуляции двумерных гладких многообразий и их классификации с помощью симплициальных комплексов.

Дадим классификацию двумерных гладких компактных связных замкнутых многообразий. На протяжении всей оставшейся части этого параграфа мы будем рассматривать только такие многообразия, а поэтому мы не будем всякий раз оговаривать перечисленные выше ограничения, наложенные на многообразия.

Лемма 2. Любое двумерное гладкое многообразие M^2 можно гладко триангулировать (т. е. разбить гладкими кривыми на гладкие треугольники такие, что любые два треугольника этого разбиения либо не пересекаются, либо имеют одну общую вершину, либо — одну общую сторону).

Доказательство. Вложим M^2 в конечномерное евклидово пространство (см. [1], ч. II, § 9). Тогда на M^2 возникает индуцированная риманова метрика. Для достаточно малого $\epsilon > 0$ любые две точки $x, y \in M^2$, для которых $\rho(x, y) < \epsilon$ (ρ — расстояние на M^2 , порожденное римановой метрикой), соединяются единственной кратчайшей геодезической $\gamma_{x,y}$. Покроем M^2 конечной системой дисков радиуса $< \epsilon/2$: $D_1, D_2, \dots, D_N$. Диск D_1 может быть гладко триангулирован с помощью геодезических. Для распространения триангуляции на диски, имеющие непустое пересечение с D_1 (например, на D_2), достаточно заметить, что геодезическая, принадлежащая $D_1 \cap D_2$, построенная ранее в D_1 , является также геодезической и с точки зрения диска D_2 , и потому триангуляцию можно продолжить в диск D_2 (быть может, предварительно измельчив триангуляцию на D_1). Процесс заканчивается через конечное число шагов. Лемма доказана.

Дадим первоначально описание всех типов двумерных многообразий. Первая серия — это сфера с g ручками M_g^2 ; g — род поверхности. Эти многообразия появляются, например, при изучении римановых поверхностей алгебраических функций вида $w = \pm \sqrt{P_n(z)}$ (полином P_n не имеет кратных корней). Напомним, что M_g^2 равно совокупности нулей уравнения $w^2 - P_{2g+1}(z) = 0$ в $\mathbb{CP}^2(z, w)$. Эти многообразия можно гладко реализовать в $\mathbb{R}^3$ в виде поверхностей, показанных на рис. 4 (см. подробнее [1], ч. II, § 4).

Вторая серия многообразий (будем обозначать их через M_μ^2) получается, если из сферы S^2 выбросить μ попарно непересекающихся дисков D^2 и на границе каждого из получившихся отверстий отождествить диаметрально противоположные точки (см. рис. 5, а). Эта операция называется «заклейкой сферы S^2 μ пленками Мёбиуса».

В частности, при $\mu = 1$ поверхность M_1^2 — это вещественная проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ (рис. 5, б), при $\mu = 2$ поверхность M_2^2 называется бутылкой Клейна. Отметим, что в [1], ч. II, § 18 бутылка Клейна определялась, как фактор плоскости по

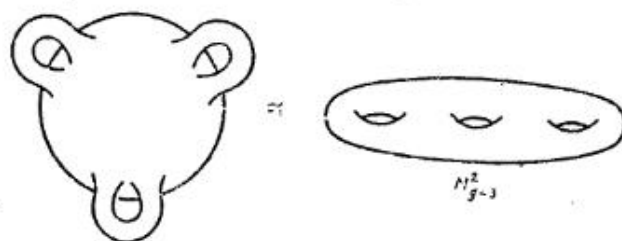
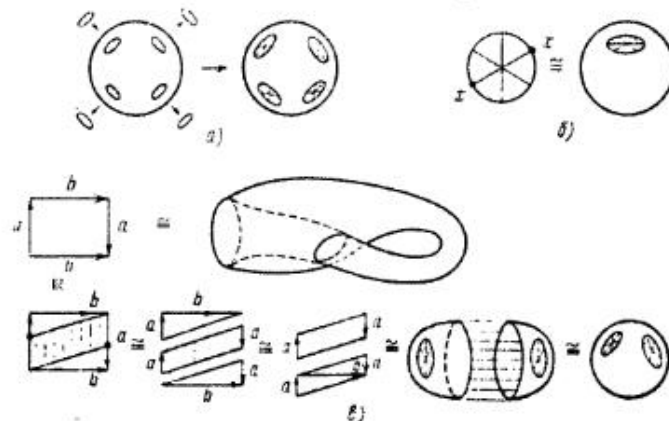
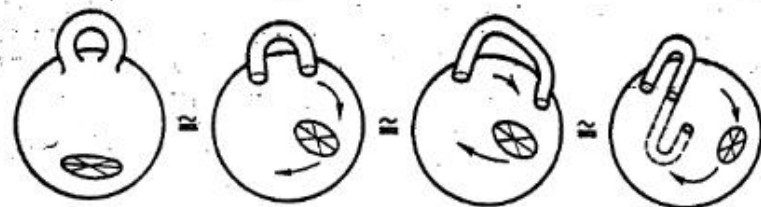
Рис. 4. Сфера с g ручками $S^2 + (g) = M_g^2$ (на рисунке $g = 3$).Рис. 5. а) Многообразие $M_\mu^2 = S^2 + (\mu)$ (на рисунке $\mu = 4$) получено заклейкой сферы S^2 μ пленками Мёбиуса; б) $M_{\mu-1}^2 = RP^2$ — вещественная проективная плоскость; в) $M_{\mu-2}^2$ — бутылка Клейна.

Рис. 6.

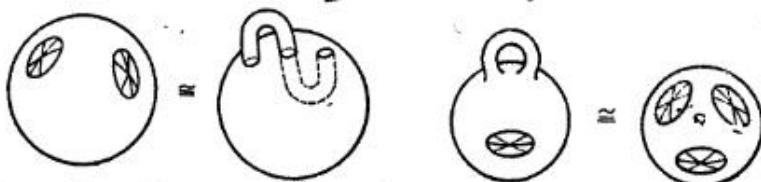
Рис. 7. Сфера S^2 с «вывернутой ручкой».

Рис. 8.

некоторой дискретной группе движений. Совпадение такой ее реализации с $M_{\mu-2}^2$ видно из рис. 5, в.

Argiogi могла бы иметь право на независимое существование также и «смешанная» серия: сфера S^2 , к которой приклеено g ручек и μ пленок Мёбиуса. Однако эта «смешанная» серия полностью содержится в серии M_μ^2 . Действительно, рассмотрим S^2 , к которой приклеена одна ручка и одна пленка Мёбиуса (см. рис. 6). Но для бутылки Клейна имеет место диффеоморфизм, изображенный на рис. 7.

Таким образом, приклейка к S^2 одной ручки и одной пленки Мёбиуса эквивалентна приклейке к S^2 трех пленок Мёбиуса (см. рис. 8). Следовательно, в присутствии хотя бы одной пленки Мёбиуса каждая ручка может быть диффеоморфно заменена двумя пленками Мёбиуса.

Как мы сейчас строго докажем, многообразия M^2 действительно полностью описываются этими двумя бесконечными сериями: M_g^2 и M_μ^2 .



Рис. 9.

Рассмотрим произвольное M^2 (см. ограничения в начале раздела) с гладкой триангуляцией (см. лемму). Разрежем M^2 вдоль всех ребер этой триангуляции, поставив предварительно на обеих сторонах каждого разреза одинаковые буквы (различные для разных разрезов) и фиксируя на обоих берегах разреза одинаковую ориентацию (см. рис. 9).

Тем самым мы превратили M^2 в набор треугольников, на сторонах которых отмечены буквы и задано направление; каждая буква входит в этот набор ровно два раза, причем две одинаковые буквы всегда принадлежат различным треугольникам. Начнем обратный процесс склейки M^2 , требуя, однако, чтобы каждый раз после приклейки к уже полученной области нового треугольника область оставалась бы плоской. Очевидно, что в результате этой процедуры (и указанных свойств нумерации сторон) мы получим связный плоский многоугольник, стороны которого занумерованы буквами и снабжены ориентациями (каждая буква встречается ровно два раза). Этот многоугольник назовем фундаментальным многоугольником (он определен по данной триангуляции неоднозначно). Фиксируем на многоугольнике W ориентацию и сопоставим ему слово, которое естественно возникает при обходе границы W (начиная с какой-то вершины, все равно с какой): последовательно выписываем буквы, нумерующие стороны W , причем в слово помещаем букву в степени $+1$, если ориентация стороны совпадает с ориентацией, индуцированной ориентацией W , и в степени -1 , в противном случае. См. пример на рис. 10.

Итак, мы сопоставили каждому M^2 (неоднозначно) некоторое слово $W = a_{i_1}^{e_1} a_{i_2}^{e_2} \dots a_{i_k}^{e_k}$, k — четное число сторон W ; каждая буква a_α входит в W ровно два раза. Эти «слова» кодируют $\{M^2\}$; каждому M^2 отвечает бесконечное множество таких кодов. Будем теперь перестраивать эти коды элементарными операциями (порождающими гомеоморфизмы M^2), чтобы привести их к канонической форме. Оказывается, существуют только три канонические формы (они и дают классификацию $\{M^2\}$).

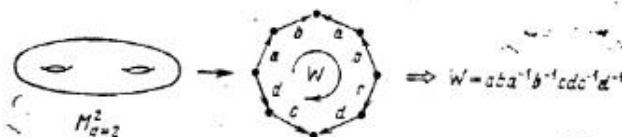


Рис. 10.

Лемма 3. Слово W можно перестроить так, что все вершины W (т. е. вершины многоугольника) склеятся в одну точку.

Доказательство. Предположим, что существует по крайней мере два непустых класса эквивалентности вершин: $\{P\}$ и $\{Q\}$. Можно считать, что существует такое ребро $a \in \partial W$, что его концевые точки принадлежат разным классам: $\{P\}$ и $\{Q\}$. Выполним следующую элементарную операцию (см. рис. 11). (Жирными отрезками обозначены те ребра из ∂W , которые нас сейчас не интересуют.)

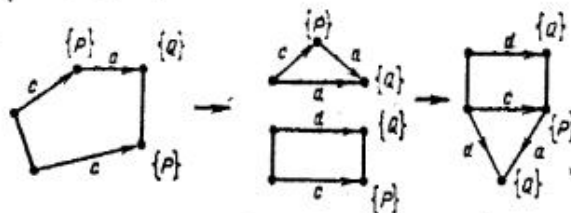


Рис. 11.

Ясно, что эта операция переклейки многоугольника W соответствует гомеоморфизму M^2 . С другой стороны, эта перестройка уменьшила число вершин — представителей класса $\{P\}$ на единицу и увеличила число вершин — представителей класса $\{Q\}$ на единицу: $(\{P\}, \{Q\}) \rightarrow (\{P\} - 1; \{Q\} + 1)$. Таким образом, мы постепенно уничтожаем класс $\{P\}$, «перекачивая» вершины этого класса в другие классы. Последним шагом будет операция уничтожения последней вершины класса $\{P\}$ (см. рис. 12). (Отметим, что в процессе уничтожения класса $\{P\}$, классы $\{Q\}$, в которые перекачиваются вершины класса $\{P\}$, могли меняться.) Многоугольник (или слово) W , у которого только один класс вершин, называется обычно «приведенным».

Лемма 4. Пусть слово W имеет вид $W = -aa^{-1}$. Тогда существует гомеоморфизм, переводящий слово W в эквивалентное слово $W' = -1$.

Доказательство. См. рис. 12.

Лемма 5. $W = -a-a \simeq W' = -aa$.

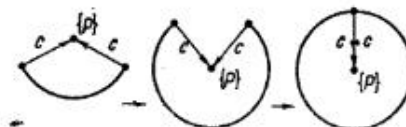


Рис. 12.

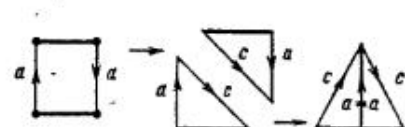
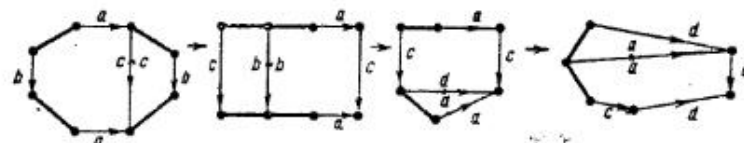


Рис. 13.

Доказательство. См. рис. 13.

Осталось переобозначить c через a . Лемма доказана.

Лемма 6. $W = -a-b-a^{-1}-b^{-1} \simeq W' = -aba^{-1}b^{-1}$



$$\begin{array}{l} W = -a-b-a^{-1}-b^{-1} \\ \quad \quad \quad \uparrow \downarrow \\ W' = -aba^{-1}b^{-1} \end{array}$$

Рис. 14.

Доказательство. См. рис. 14. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $W = -a \alpha a^{-1}$, где множество букв $\alpha \neq \emptyset$, то тогда существует $b \in \alpha$ такая, что $b^{-1} \neq \alpha$:

$$W = -a \underbrace{b}_{\alpha} a^{-1} = -b^{-1}.$$

Доказательство. Допустим противное: пусть для любого $b \in \alpha$, $b^{-1} \in \alpha$. Но тогда в множестве вершин W возни-

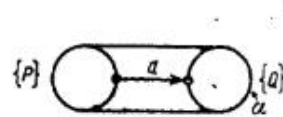


Рис. 15.

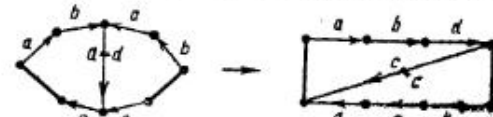


Рис. 16.

кает по крайней мере два класса неэквивалентных вершин, так как вершины $\in \alpha$, взаимодействуют (склеиваются) только с вершинами $\in \alpha$ (см. рис. 15). Так как $\alpha \neq \emptyset$ и $W \setminus \{\alpha \cup a \cup a^{-1}\} \neq \emptyset$ (см. лемму 4), то получаем противоречие с утвержде-

нием леммы 3, согласно которой мы считаем W приведенным многоугольником. Лемма доказана.

Лемма 8. $W = -aba^{-1}b^{-1} - cc - \simeq W' = -a^2 - b^2 - c^2$.

Доказательство. См. рис. 16. Лемма 8 окончательно следует из леммы 5.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3 (о классификации двумерных поверхностей). Любое двумерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие M^2 диффеоморфно одному из многообразий, определяемых следующими словами (кодами) W :

- 1) $W = aa^{-1}$;
- 2) $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$;
- 3) $W = c_1^2 c_2^2 \dots c_\mu^2$.

Любое гладкое двумерное связное компактное многообразие с краем получается из двумерного диска D^2 путем следующих операций: а) выбрасыванием конечного числа точек (т. е. конечного числа дисков достаточно малого радиуса); б) приклейкой конечного числа ручек; в) приклейкой конечного числа пленок



Рис. 17.

Мёбиуса. При этом перечисленные операции не должны затрагивать границу исходного диска D^2 .

Опишем более наглядно структуру многообразий M^2 в соответствии с этой классификацией.

Многообразие типа 1) диффеоморфно сфере S^2 (см. рис. 17).

Многообразие типа 2) диффеоморфно сфере S^2 с g ручками (ориентируемые многообразия M_g^2). См. рис. 18.

Многообразие типа 3) диффеоморфно сфере S^2 с μ пленками Мёбиуса (неориентируемые многообразия M_μ^2). См. рис. 19.

Замечание 1. Элементарным упражнением является вычисление групп гомологий многообразий типа 1), 2), 3) (например, с целыми коэффициентами). Вычисление показывает, что все перечисленные канонические формы не гомеоморфны между собой.

Замечание 2. Существуют и другие удобные способы кодировать $\{M^2\}$. Любое M^2 можно представить в следующем виде:

$$W = a_1 a_2 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_N^{-1} a_N^\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

где $\varepsilon = -1$ тогда и только тогда, когда $M^2 = M_g^2$ — ориентируемое многообразие (тогда $N = 2g$ четно); $\varepsilon = +1$ (N любое) тогда и только тогда, когда $M^2 = M_\mu^2$ — неориентируемо.

Доказательство. Рассмотрим случай M_g^2 : $W = a_1 \dots a_N a_1^{-1} \dots a_N^{-1}$; $N = 2g$. Приведем W с помощью элементарных преобразований (см. выше леммы 3—8) к канонической

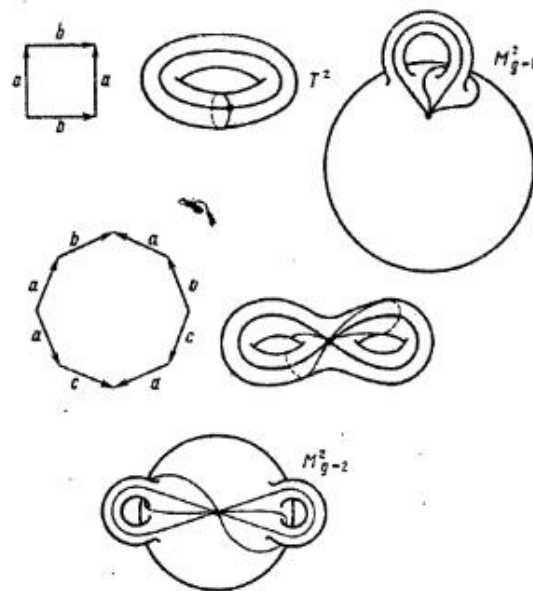


Рис. 18.



Рис. 19.

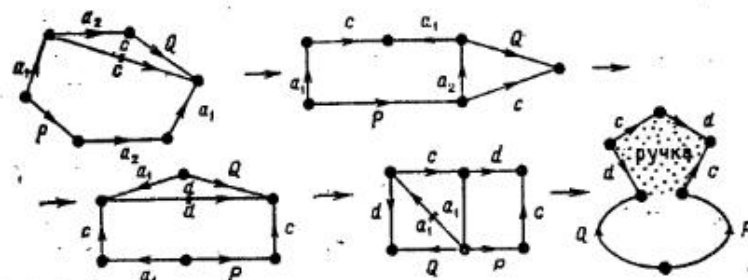


Рис. 20.

форме M_g^2 (см. предыдущую теорему). Это приведение будем осуществлять, последовательно отщепляя стандартные ручки вида $aba^{-1}b^{-1}$. Рассмотрим

$$W = \underbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_N}_{a \ b} \underbrace{a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \dots a_N^{-1}}_{a^{-1} b^{-1}}.$$

Далее см. рис. 20.

Таким образом, мы в явном виде выделим первую ручку: $d^{-1}cdc^{-1}$, не изменив при этом отрезков P и Q . Продолжая операцию выделения ручек и вспоминая, что $N = 2g$ четно, приходим к слову $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \simeq M_g^2$. Таким образом, мы представили все ориентируемые многообразия. Для «ориентированного случая» теорема доказана. Для «неориентируемого случая» доказательство совершенно аналогично (см. леммы 3–8), а потому мы его опустим (проведите это доказательство самостоятельно!).

§ 4. Операция приклейки клетки к топологическому пространству. Клеточные пространства. Теоремы о приведении клеточных пространств. Гомологии и фундаментальная группа поверхностей и некоторых других многообразий

Пусть X — топологическое пространство, D^n — n -мерный диск; $S^{n-1} = \partial D^n$ — его граница — $(n-1)$ -мерная сфера. Мы считаем фиксированной ориентацию диска D^n ; эта ориентация индуцирует ориентацию границы S^{n-1} . Пусть задано отображение этой сферы в пространство X :

$$f: S^{n-1} \rightarrow X. \quad (1)$$

Построим новое пространство $D^n \cup_f X$, отождествляя каждую точку x на сфере S^{n-1} с точкой $f(x)$ в пространстве X . Говорят, что пространство $D^n \cup_f X$ получено из пространства X приклейкой n -мерной клетки (D^n, f) .

Топология в пространстве $D^n \cup_f X$ вводится следующим образом. Множество $K \subset D^n \cup_f X$ называется замкнутым, если замкнуто его пересечение $K \cap X$, а также полный прообраз пересечения $K \cap D^n$ замкнут в диске D^n .

Пример 1. Сфера S^n получена из точки $*$ приклейкой n -мерной клетки: $S^n = D^n \cup_f *$, где $f: S^{n-1} \rightarrow *$ — отображение в точку.

Пример 2. Вещественное проективное пространство RP^n можно рассматривать как диск D^n , у которого склеены диаметрально противоположные точки на границе S^{n-1} . Заметим, что сфера S^{n-1} с отождествленными диаметрально противополож-

ными точками есть RP^{n-1} . Следовательно, RP^n можно рассматривать как RP^{n-1} с приклеенной n -мерной клеткой

$$RP^n = D^n \cup_{f_n} RP^{n-1}. \quad (2)$$

Здесь отображение $f_n: S^{n-1} \rightarrow RP^{n-1}$ — стандартное накрытие.

Лемма 1. Если отображения $f, g: S^{n-1} \rightarrow X$ гомотопны, то пространства $D^n \cup_f X$ и $D^n \cup_g X$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Пусть отображение $F: S^{n-1} \times I \rightarrow X$ задает гомотопию отображений f и g , где I — единичный отрезок. Приклеим к пространству X произведение $D^n \times I$ по отображению F части его границы:

$$\hat{X} = (D^n \times I) \cup_F X. \quad (3)$$

Тогда пространства $D^n \cup_f X$ и $D^n \cup_g X$ лежат в $\hat{X}$:

$$D^n \cup_f X = ((D^n \times 0) \cup_F X) \subset \hat{X}, \quad D^n \cup_g X = ((D^n \times 1) \cup_F X) \subset \hat{X}. \quad (4)$$

Пусть φ_t — гомотопия, стягивающая $D^n \times I$ на $D^n \cup S^{n-1} \times I$ по лучам, проведенным из точки $*$ (см. рис. 21). Гомотопия φ_t постоянна на $D^n \cup S^{n-1} \times I$, поэтому определяет гомотопическую эквивалентность $\hat{X} \sim D^n \cup_f X$. Аналогично, $\hat{X} \sim D^n \cup_g X$. Лемма доказана.

Определение 1. Пространство X называется клеточным, если оно получено из конечного набора точек итерированием операции приклеивания клеток различных размерностей.

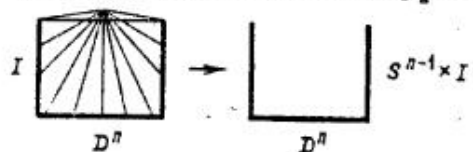


Рис. 21.

Первоначальный набор точек также можно считать 0-мерными клетками.

Замечание. Для клеточных пространств с бесконечным числом клеток мы потребуем, чтобы они имели конечное число клеток в каждой размерности.

Определение 2. Клеточное пространство X называется клеточным комплексом, если каждая клетка приклеена к клеткам меньшей размерности.

Объединение всех клеток размерности $k \leq n$ мы будем называть n -мерным клеточным остовом комплекса X . Обозначим n -мерный клеточный остов комплекса X через X_n . Получаем систему вложенных остовов:

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X. \quad (5)$$

Замечание. Частным случаем клеточного комплекса является симплициальный комплекс. n -мерный остов симпли-

форме M_g^2 (см. предыдущую теорему). Это приведение будем осуществлять, последовательно отщепляя стандартные ручки вида $aba^{-1}b^{-1}$. Рассмотрим

$$W = \underbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \dots a_N^{-1}}_{a^{-1} b^{-1}}.$$

Далее см. рис. 20.

Таким образом, мы в явном виде выделим первую ручку: $d^{-1}cdc^{-1}$, не изменив при этом отрезков P и Q . Продолжая операцию выделения ручек и вспоминая, что $N = 2g$ четно, приходим к слову $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \simeq M_g^2$. Таким образом, мы представили все ориентируемые многообразия. Для «ориентированного случая» теорема доказана. Для «неориентируемого случая» доказательство совершенно аналогично (см. леммы 3–8), а потому мы его опустим (проведите это доказательство самостоятельно!).

§ 4. Операция приклейки клетки к топологическому пространству. Клеточные пространства. Теоремы о приведении клеточных пространств. Гомологии и фундаментальная группа поверхностей и некоторых других многообразий

Пусть X — топологическое пространство, D^n — n -мерный диск; $S^{n-1} = \partial D^n$ — его граница — $(n-1)$ -мерная сфера. Мы считаем фиксированной ориентацию диска D^n ; эта ориентация индуцирует ориентацию границы S^{n-1} . Пусть задано отображение этой сферы в пространство X :

$$f: S^{n-1} \rightarrow X. \quad (1)$$

Построим новое пространство $D^n \cup_f X$, отождествляя каждую точку x на сфере S^{n-1} с точкой $f(x)$ в пространстве X . Говорят, что пространство $D^n \cup_f X$ получено из пространства X приклейкой n -мерной клетки (D^n, f).

Топология в пространстве $D^n \cup_f X$ вводится следующим образом. Множество $K \subset D^n \cup_f X$ называется замкнутым, если замкнуто его пересечение $K \cap X$, а также полный прообраз пересечения $K \cap D^n$ замкнут в диске D^n .

Пример 1. Сфера S^n получена из точки $*$ приклейкой n -мерной клетки: $S^n = D^n \cup_f *$, где $f: S^{n-1} \rightarrow *$ — отображение в точку.

Пример 2. Вещественное проективное пространство RP^n можно рассматривать как диск D^n , у которого склеены диаметрально противоположные точки на границе S^{n-1} . Заметим, что сфера S^{n-1} с отождествленными диаметрально противополож-

ными точками есть RP^{n-1} . Следовательно, RP^n можно рассматривать как RP^{n-1} с приклеенной n -мерной клеткой

$$RP^n = D^n \cup_{f_n} RP^{n-1}. \quad (2)$$

Здесь отображение $f_n: S^{n-1} \rightarrow RP^{n-1}$ — стандартное накрытие.

Лемма 1. Если отображения $f, g: S^{n-1} \rightarrow X$ гомотопны, то пространства $D^n \cup_f X$ и $D^n \cup_g X$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Пусть отображение $F: S^{n-1} \times I \rightarrow X$ задает гомотопию отображений f и g , где I — единичный отрезок. Приклеим к пространству X произведение $D^n \times I$ по отображению F части его границы:

$$\hat{X} = (D^n \times I) \cup_F X. \quad (3)$$

Тогда пространства $D^n \cup_f X$ и $D^n \cup_g X$ лежат в $\hat{X}$:

$$D^n \cup_f X = ((D^n \times 0) \cup_F X) \subset \hat{X}, \quad D^n \cup_g X = ((D^n \times 1) \cup_F X) \subset \hat{X}. \quad (4)$$

Пусть φ_t — гомотопия, стягивающая $D^n \times I$ на $D^n \cup S^{n-1} \times I$ по лучам, проведенным из точки $*$ (см. рис. 21). Гомотопия φ_t постоянна на $D^n \cup S^{n-1} \times I$, поэтому определяет гомотопическую эквивалентность $\hat{X} \sim D^n \cup_f X$. Аналогично, $\hat{X} \sim D^n \cup_g X$. Лемма доказана.

Определение 1. Пространство X называется *клеточным*, если оно получено из конечного набора точек итерированием операции приклеивания клеток различных размерностей.

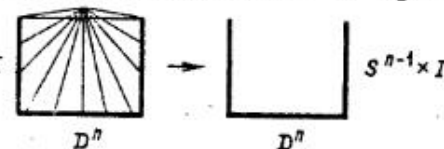


Рис. 21.

Первоначальный набор точек также можно считать 0-мерными клетками.

Замечание. Для клеточных пространств с бесконечным числом клеток мы потребуем, чтобы они имели конечное число клеток в каждой размерности.

Определение 2. Клеточное пространство X называется *клеточным комплексом*, если каждая клетка приклеена к клеткам меньшей размерности.

Объединение всех клеток размерности $k \leq n$ мы будем называть n -мерным клеточным остовом комплекса X . Обозначим n -мерный клеточный остов комплекса X через X_n . Получаем систему вложенных остовов:

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X. \quad (5)$$

Замечание. Частным случаем клеточного комплекса является симплициальный комплекс. n -мерный остов симпли-

циального комплекса — это совокупность всех его симплексов до размерности n включительно.

Теорема 1. Любое клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному комплексу.

Доказательство. Достаточно показать, что любое отображение сферы S^k в клеточный комплекс Y гомотопно отображению S^k в его k -мерный остов Y_k . Тогда в силу леммы 1 результат каждой приклейки клетки будет гомотопически эквивалентен клеточному комплексу.

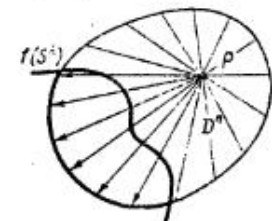


Рис. 22.

Итак, пусть Y — клеточный комплекс, $f: S^k \rightarrow Y$ — отображение. Образ сферы S^k при отображении f пересекается лишь с конечным числом клеток. Если образ $f(S^k)$ пересекается с внутренностью какой-то клетки D^n , где $n > k$, то эту часть образа можно вытеснить на границу. Действительно, отображение f на полном прообразе внутренней клетки $f^{-1}(D^n)$ можно заменить гомотопным ему

гладким (см. [1], ч. II, § 12), и по теореме Сарда этот образ не покрывает хотя бы одной внутренней точки P в D^n . Проектируя $D^n \setminus P$ из точки P на границу, мы и вытесняем часть образа $f(S^k)$ на границу, т. е. в остов Y_{n-1} (см. рис. 22).

Повторяя это рассуждение для всех клеток размерности больше k , мы в конце концов затащим образ $f(S^k)$ в остов Y_k комплекса Y . Тем самым теорема полностью доказана.

Определение 3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточных комплексов называется *клеточным*, если оно переводит k -мерный остов X_k комплекса X в k -мерный остов Y_k комплекса Y (k любое).

Теорема 2. Любое непрерывное отображение клеточных комплексов гомотопно клеточному отображению.

Доказательство этой теоремы (теоремы о «клеточной аппроксимации») полностью аналогично доказательству теоремы 1, и мы оставляем его читателю в качестве задачи.

Пусть X — клеточный комплекс; X_{k-1} и X_{k-2} его $(k-1)$ -мерный и $(k-2)$ -мерный остовы. Заметим, что пространство X_{k-1}/X_{k-2} , где X_{k-2} отождествлено в точку, есть просто букет $(k-1)$ -мерных сфер (по одной для каждой клетки D^{k-1}). Приклейке k -мерной клетки (D^k, f) отвечает отображение

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X_{k-1} \rightarrow X_{k-1}/X_{k-2} \quad (6)$$

сферы S^{k-1} в букет $(k-1)$ -мерных сфер.

Пусть $\sigma^k = (D^k, f)$, $\sigma_i^{k-1} = (D^{k-1}, f_i)$ — клетки размерности k и $(k-1)$. Определим «коэффициент инциденции» — число $[\sigma^k: \sigma_i^{k-1}]$ для пары клеток σ^k и σ_i^{k-1} : это степень отображения

(6) на i -е слагаемое букета X_{k-1}/X_{k-2} (сферу S_i^{k-1} , отвечающую клетке σ_i^{k-1}).

Определим теперь комплекс клеточных цепей комплекса X , обозначаемый через $C(X; G) = \sum_{k \geq 0} C_k(X; G)$. Клеточная цепь размерности k — это формальная линейная комбинация клеток: $c_k = \sum_i g_i \sigma_i^k$, где σ_i^k — клетки размерности k , g_i — элементы произвольной абелевой группы G , записанной аддитивно. Определим граничный оператор ∂ формулой

$$\partial \sigma^k = \sum_i [\sigma^k: \sigma_i^{k-1}] \sigma_i^{k-1}, \quad (7)$$

$$\partial: C_k(X; G) \rightarrow C_{k-1}(X; G).$$

(На любые цепи оператор ∂ продолжается линейно.)

Замечание 1. Если X — симплициальный комплекс, то определенный здесь оператор ∂ совпадает с граничным оператором из § 3 (проверьте).

Замечание 2. Для $G = \mathbb{Z}$ (целочисленные цепи) имеем отображение $\pi_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\alpha} C_k(X; \mathbb{Z})$ на всю группу цепей.

Лемма 2. $\partial \partial = 0$.

Доказательство. Можно считать, что каждая клетка $\sigma_i^k: D^k \rightarrow X_k$ представляет элемент $[\sigma_i^k]$ из относительной группы $\pi_k(X_k, X_{k-1})$ (см. [1], ч. II, § 21). Граничный оператор ∂ порожден, как очевидно следует из его определения, граничным гомоморфизмом точной последовательности пары (X_k, X_{k-1})

$$\partial: \pi_k(X_k, X_{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(X_{k-1}) \quad (8)$$

и гомоморфизмом $j: \pi_{k-1}(X_{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})$ (см. [1], ч. II, § 21). Мы имеем для σ_i^k как цепи из $C_k(X; \mathbb{Z})$:

$$\partial(\sigma_i^k) = \alpha(j\partial[\sigma_i^k]) \in C_{k-1}(X; \mathbb{Z}). \quad (9)$$

В силу тождества $\partial j \equiv 0$ мы получаем $\partial \partial \equiv 0$ для целочисленных цепей. Клетки σ_i^k дают базис также для цепей с любой группой коэффициентов G . Лемма доказана.

Теперь можно обычным образом определить гомологии и когомологии комплекса клеточных цепей. Мы получим клеточные гомологии и когомологии. Для симплициальных комплексов эти гомологии совпадают с симплициальными.

Примеры клеточных комплексов.

Пример 1. Сфера S^n . Мы уже видели, что сфера S^n получается прилейкой одной n -мерной клетки σ^n к нульмерной σ^0 . Здесь мы имеем: $\partial \sigma^0 = 0$, $\partial \sigma^n = 0$. Последнее очевидно для всех $n > 1$. Для $n = 1$ граница клетки σ^1 — это нульмерная сфера S^0 (пара точек), причем эти две точки входят с разными знаками.

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} H_0(S^n; G) &= G, \quad n \geq 1, \\ H_n(S^n; G) &= G, \\ H_k(S^n; G) &= 0, \quad k \neq 0, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Если имеется букет q сфер S^n , $n \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, q$, соединенных в одной точке, то имеется одна вершина σ^0 и q n -мерных клеток $\sigma_1^n, \dots, \sigma_q^n$, где $\partial\sigma_i^n = 0$. К такому букету стягивается область,

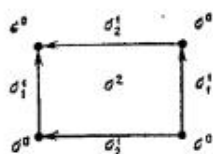


Рис. 23. Тор.

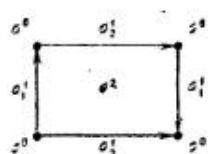
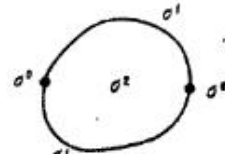
Рис. 24. Бутылка Клейна K^2 .

Рис. 25. Проективная плоскость.

полученная из евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ выкидыванием набора q точек. Обозначим этот букет через K_q^n . Мы имеем:

$$\begin{aligned} H_0(K_q^n; G) &= G, \\ H_n(K_q^n; G) &= G + G + \dots + G \quad (q \text{ штук}), \\ H_l(K_q^n; G) &= 0, \quad l \neq 0, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Пример 2. Клеточное разбиение тора. Здесь имеем клетки: $\sigma^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma^2$ (см. рис. 23), причем $\partial\sigma^0 = \partial\sigma_1^1 = \partial\sigma_2^1 = \partial\sigma^2 = 0$;

$$H_0(T^2) = G, \quad H_1(T^2) = G + G, \quad H_2(T^2) = G. \quad (12)$$

Пример 3. Бутылка Клейна имеет следующие клетки: $\sigma^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma^2$ (см. рис. 24), причем $\partial\sigma^0 = \partial\sigma_1^1 = \partial\sigma_2^1 = 0$, $\partial\sigma^2 = 2\sigma_1^1$

$$\begin{aligned} H_0(K^2; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \quad H_2(K^2; \mathbb{Z}) = 0, \quad H_1(K^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2; \\ H_2(K^2; \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Пример 4. Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Здесь имеем 3 клетки: $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$; $\partial\sigma^0 = \partial\sigma^1 = 0$, $\partial\sigma^2 = 2\sigma^1$ (см. рис. 25),

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, \quad H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0. \quad (14)$$

Пример 5. Ориентируемая поверхность рода g : имеем $4g$ -угольник (см. рис. 26 для $g = 2$). Клетки: $\sigma^0, \sigma_1^1, \dots, \sigma_{4g}^1, \sigma^2$. Границы всех клеток нулевые. Имеем гомологии ($G = \mathbb{Z}$): $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ ($2g$ слагаемых).

Пример 6. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Выше мы видели, что $\mathbb{R}P^n = D^n \cup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}$, где $f_n: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ — стандарт-

ное накрытие. Получаем по одной клетке $\sigma^k = (D_k, f_k)$ в каждой размерности k : $\sigma^0, \dots, \sigma^n$. Покажем, что $\partial\sigma^{2k+1} = 0$, $\partial\sigma^{2k} = 2\sigma^{2k-1}$. Отображение границы S^m клетки σ^{m+1} в m -мерный остов проективного пространства — это стандартное накрытие $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$. Поэтому нужно вычислить степень отображения

$$S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^m / \mathbb{R}P^{m-1} = S^m. \quad (15)$$

Это отображение изображено на рис. 27. Оно является суммой (в смысле группы $\pi_m(S^m)$) двух отображений S^m в S^m . При нечетном m оба эти отображения имеют степень $+1$, поэтому $\partial\sigma^{m+1} = 2\sigma^m$. При m четном знаки степеней противоположны, и $\partial\sigma^{m+1} = 0$.

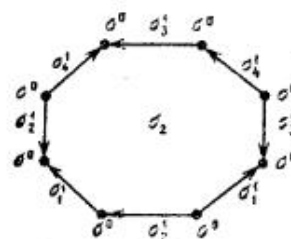


Рис. 26. Крендель.

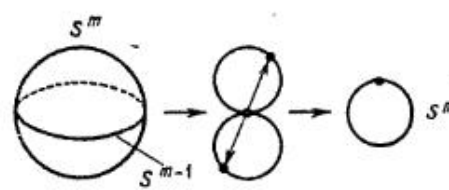


Рис. 27.

Итак, получаем вид гомологий проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ для $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{Z}_2$:

$$a) \quad H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \mathbb{Z}, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad (16)$$

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & k = 2l, \\ \mathbb{Z}_2, & k = 2l + 1, \end{cases} \quad \text{где } 0 < k < n. \quad (17)$$

Пример 7. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$. Пусть $(z_0, \dots, z_n)$ — однородные координаты в $\mathbb{C}P^n$. Уравнение $z_0 = 0$ определяет в $\mathbb{C}P^n$ подмногообразие, совпадающее с $\mathbb{C}P^{n-1}$. Разность $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ есть n -мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ (с координатами $z_1/z_0, \dots, z_n/z_0$). Поэтому разность $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ определяет $2n$ -мерную клетку σ^{2n} . Продолжая этот процесс, мы получим разбиение комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ на четномерные клетки $\sigma^0, \sigma^2, \dots, \sigma^{2n}$. Очевидно, здесь все границы нулевые. Поэтому $H_{2k}(\mathbb{C}P^n; G) = G$, $0 \leq k \leq n$, $H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n; G) = 0$.

Клеточные комплексы удобно использовать и для вычисления гомотопий. Напомним, что пространство X называется n -связным, если оно линейно связно, и все группы $\pi_i(X) = 0$ при $i \leq n$.

Теорема 3. Всякий n -связный клеточный комплекс K гомотопически эквивалентен клеточному комплексу $\tilde{K}$ с единственной вершиной σ^0 и без клеток размерностей $1, 2, \dots, n$.

Прежде чем давать доказательство теоремы, мы разберем два примера.

Пример 8. Пусть $n = 0$. Приведение линейно связного комплекса K к одновершинному $\tilde{K}$ таково: если имеется ребро σ_i^1 (1-мерная клетка), у которого граница $\partial\sigma_i^1 = \sigma_{1i}^0 \cup \sigma_{2i}^0$ состоит из двух различных вершин $\sigma_{1i}^0 \neq \sigma_{2i}^0$, то мы накладываем отождествление, стягивая все ребро σ_i^1 в одну точку $\tilde{\sigma}_i^0 = \tilde{\sigma}_{2i}^0$, которая будет вершиной. Остальные клетки не меняем. Получается новый комплекс K' с меньшим числом вершин и т. д., пока не приходим к одновершинному. Комплексы K и K' гомотопически эквивалентны (доказательство будет ниже). В результате получаем комплекс $\tilde{K}$ с одной вершиной $\tilde{\sigma}^0$, 1-клетками $\tilde{\sigma}_i^1$ и 2-клетками $\tilde{\sigma}_i^2$. 1-остов $\tilde{K}_1$ является букетом окружностей $\tilde{\sigma}_i^1$: $\tilde{K}_1 = S_1^1 \vee \dots \vee S_N^1$, где N — число 1-клеток $\tilde{\sigma}_i^1$, $i = 1, \dots, N$. Группа $\pi_1(\tilde{K}_1)$ свободна с образующими $\{\tilde{\sigma}_i^1\} = a_i$ (см. [1], ч. II, § 19). Клетки $\tilde{\sigma}_i^2$ приклеиваются с помощью отображений границы $S^1 = \partial\tilde{\sigma}_i^2 \rightarrow \tilde{K}_1$, дающих некоторые элементы V_j из свободной группы $\pi_1(\tilde{K}_1)$ с образующими $a_1, \dots, a_N$. Группа $\pi_1(K)$ задается тем самым образующими $a_1, \dots, a_N$ и соотношениями $V_j = 1$ для всех 2-клеток $\tilde{\sigma}_i^2$ в комплексе $\tilde{K}$ (с одной вершиной). Переходя к группе $H_1(K; \mathbb{Z})$, мы получим базисные циклы $[a_1], \dots, [a_N]$ и соотношения $V_j = 0$ (в аддитивной записи) в коммутированной группе. Тем самым оправдано определение группы гомологий $H_1(K; \mathbb{Z}) = \pi_1(K) / [\pi_1(K), \pi_1(K)]$, данное в [1], ч. II, § 19.

Пример 9. Если $n > 0$, то группы $H_{n+1}(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ и $\pi_{n+1}(\tilde{K})$ обе коммутативны. Они заданы одними и теми же образующими a_i — $(n+1)$ -клетками $\tilde{\sigma}_i^{n+1}$ в $\tilde{K}$ ($i = 1, \dots, N$) и одинаковыми соотношениями из границ $(n+2)$ -клеток $\tilde{\sigma}_i^{n+2}$. Получаем:

Следствие (теорема Гуревича). *Имеет место равенство $\pi_{n+1}(K) = H_{n+1}(K, \mathbb{Z})$ для n -связного комплекса ($n > 0$).*

Доказательство. Каждое отображение $(n+1)$ -мерной сферы в клеточный комплекс K гомотопно отображению в $(n+1)$ -мерный остов (см. теорему 2). Поэтому любое такое отображение представляется в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами клеток σ_i^{n+1} в K ($i = 1, \dots, N$). Каждое соотношение $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1} \sim 0$ в группе $\pi_{n+1}(K)$ есть отображение диска D^{n+2} в комплекс K такое, что его ограничение на границу S^{n+1} есть линейная комбинация $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$.

Такое отображение гомотопно отображению, переводящему D^{n+2} в остов размерности $n+2$, причем гомотопия постоянна на границе S^{n+1} (доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1). Поэтому каждое соотношение вида « $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$

гомотопно нулю» в группе $\pi_{n+1}(K)$ эквивалентно соотношению « $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$ гомологично нулю» в группе $H_{n+1}(K; \mathbb{Z})$. Следствие доказано.

Задача 1. Докажите обратное утверждение: пусть K — связный односвязный клеточный комплекс. Если $H_k(K; \mathbb{Z}) = 0$ при $0 < k < n$, то $\pi_k(K) = 0$ при тех же k и $\pi_n(K) = H_n(K; \mathbb{Z})$.

Доказательство теоремы 3. Фиксируем одну вершину σ^0 ; соединим ее путями γ_i со всеми остальными вершинами σ_i^1 . Можно считать, что эти пути целиком лежат в одномерном остове клеточного комплекса K . Приклеим к комплексу K полукруги по каждому пути γ_i . Получим новый клеточный комплекс $\tilde{K}$, который содержит комплекс K и, кроме того, клетки σ_i^1 и σ_i^2 (см. рис. 28). Внутренности клеток σ_i^1 не пересекаются, поэтому их объединение стягиваемо в $\tilde{K}$. Значит, факторпространство $\tilde{K} = \tilde{K} / \bigcup \sigma_i^1$, полученное стягиванием всех клеток σ_i^1 в σ^0 , гомотопически эквивалентно $\tilde{K}$. С другой стороны, комплекс $\tilde{K}$ стягивается на K (полукруг стягивается на диаметр), поэтому $K \sim \tilde{K} \sim \tilde{K}$. Комплекс $\tilde{K}$ имеет ровно одну нульмерную клетку (вершину).

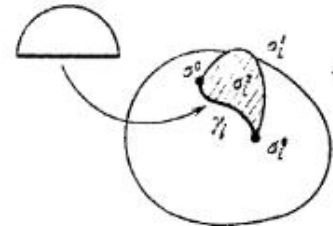


Рис. 28.

Далее, пусть комплекс K имеет одну вершину и уже не содержит клеток размерности $1, 2, \dots, k-1$, $k < n$. Тогда k -мерный остов комплекса K — это букет k -мерных сфер S_i^k . Каждая сфера S_i^k гомотопна нулю в K в силу n -связности, поэтому ее можно заклеить диском D_i^{k+1} (можно считать, что диск D_i^{k+1} лежит в $(k+1)$ -мерном остове комплекса K). Приклеим по отображению диска D_i^{k+1} диск D^{k+2} (по половине границы). Тем самым мы получим комплекс $\tilde{K}$, гомотопически эквивалентный K , содержащий по лишней клетке σ_i^{k+1} и σ_i^{k+2} на каждую k -мерную клетку в K . Объединение клеток σ_i^{k+1} стягиваемо в $\tilde{K}$, поэтому $\tilde{K} = \tilde{K} / \bigcup \sigma_i^{k+1} \sim \tilde{K} \sim K$. Комплекс $\tilde{K}$ гомотопически эквивалентен K и не имеет клеток размерности $1, 2, \dots, k-1, k$. Теорема 3 доказана.

Теорема классификации замкнутых поверхностей (см. § 3) позволяет указать стандартное представление M^2 в виде объединения клеток: $M^2 = \sigma^0 \cup \left(\bigcup_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 \right) \cup \sigma^2$, где σ^0 — точка; к ней при-

клеен букет окружностей $\bigvee S^1_\alpha$, а затем к этому букету в соответствии со словом W приклеен диск D^2 (двумерная клетка σ^2) (см. рис. 29).

Частный случай M^2_g при $g = 1$ показан на рис. 30.

Таким образом, окружности $\{S^1_\alpha\}$ можно занумеровать буквами $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n = 2g$ для M^2_g и $n = \mu$ для M^2_μ), а фундаментальный многоугольник W можно отождествить с двумерной клеткой σ^2 . Так как группа $\pi_1\left(\bigvee_{\alpha=1}^n S^1_\alpha\right)$ свободная с образующими $a_1, \dots, a_n$, то приклейка клетки σ^2 по слову $W = a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}$ вносит единственное соотношение в $\pi_1(M^2)$.

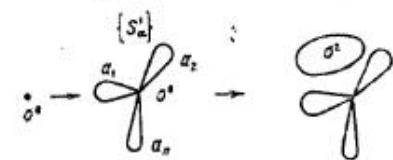


Рис. 29.

Итак, фундаментальная группа $\pi_1(M^2)$ допускает следующее представление образующими и соотношениями:

$$\pi_1(M^2) = \begin{cases} 1 & \text{для } S^2; \\ a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 & \text{для } M^2_g; \\ a_1, \dots, a_\mu; W = a_1^2 a_2^2 \dots a_\mu^2 = 1 & \text{для } M^2_\mu. \end{cases} \quad (18)$$

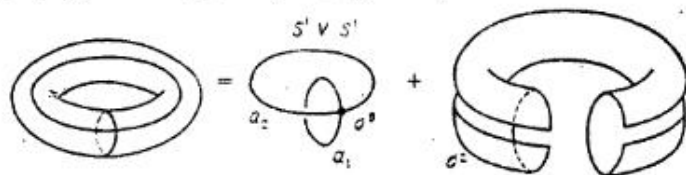


Рис. 30.

Задача 2. Доказать изоморфизм следующих групп, соответствующих разным представлениям $\pi_1(M^2)$:

1. а) $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

б) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_g, \bar{b}_g; \bar{W} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_g \bar{b}_1 \dots \bar{b}_g \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \dots \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1}$.

2. а) $a_1, \dots, a_\mu; W = a_1^2 \dots a_\mu^2$.

б) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{b}_k; \bar{W} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \dots \bar{a}_k \bar{b}_k \bar{a}_k^{-1} \bar{b}_k^{-1}, \quad k = \mu/2,$

μ четно.

в) μ любое; $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\mu; \bar{W} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_\mu \bar{a}_1^{-1} \dots \bar{a}_{\mu-1}^{-1} \bar{a}_\mu$.

Задача 3. Доказать, что для разных поверхностей группы $\pi_1(M^2)$ и даже $H_1(M^2) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ неизоморфны.

Задача 4. Дать классификацию всех двумерных гладких связных поверхностей (некомпактных).

Задача 5. Доказать, что необходимым и достаточным условием реализации двумерного ориентируемого гладкого связного многообразия M^2 (открытого или с границей) в виде плоской области является равенство нулю индекса пересечения любых двух одномерных циклов. (Плоское двумерное многообразие автоматически ориентируемо.)

Задача 6. Для того чтобы открытое двумерное многообразие M^2 было гомеоморфно открытой области в компактном замкнутом двумерном многообразии, необходимо и достаточно, чтобы группа $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ (или $\pi_1(M^2)$) имела конечное число образующих. Докажите это.

Задача 7. Доказать, что любое открытое связное двумерное многообразие M^2 имеет свободную фундаментальную группу и что такое многообразие M^2 гомотопически эквивалентно либо

конечному букету $\bigvee_{i=1}^k S^1_i$ ($k < \infty$), либо бесконечному букету

окружностей $\bigvee_{i=1}^\infty S^1_i$.

Замечание. На каждом компактном связном гладком замкнутом двумерном многообразии можно ввести риманову метрику постоянной кривизны. При этом на сфере S^2 и проективной плоскости RP^2 можно ввести метрику постоянной положительной кривизны (это утверждение очевидно); на торе и на бутылке Клейна можно ввести метрику нулевой кривизны. Существование такой метрики на торе следует из представления: $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, где группа $\Gamma = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$ имеет две образующие a, b , действующие на $\mathbb{R}^2$ как трансляции. Ясно, что группа Γ представлена изометриями евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае бутылки Клейна, допускающей представление вида $\mathbb{R}^2/\Gamma$, где группа движений Γ порождена преобразованиями

$$T_1(x, y) = (x, y + 1), \quad T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right),$$

связанными соотношением $T_2^{-1} T_1 T_2 T_1 = 1$.

На всех остальных двумерных многообразиях (связных компактных гладких замкнутых) можно ввести риманову метрику постоянной отрицательной кривизны. Для этих многообразий M^2 существует представление: $M^2 = L_2/\Gamma$, где L_2 — плоскость Лобачевского (снабженная, следовательно, метрикой постоянной отрицательной кривизны), Γ — группа, изоморфная $\pi_1(M^2)$ и действующая на L_2 изометриями (движениями) (см. [1], ч. II, § 20).

Сделаем полезное дополнение по поводу введенных выше операций приклейки ручки и приклейки пленки Мёбиуса. Оказы-

вается, эти операции являются частными случаями более общей операции — так называемой «связной суммы двух многообразий одинаковой размерности». Опишем эту операцию более подробно.

Пусть M_1^n и M_2^n — два гладких замкнутых многообразия одинаковой размерности. Вложим многообразия M_1^n и M_2^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, где N достаточно велико, и расположим M_1^n и M_2^n в $\mathbb{R}^N$ таким образом, чтобы пара точек: $x \in M_1$ и $y \in M_2$ оказались друг от друга на расстоянии ε , где $\varepsilon > 0$ — достаточно мало, причем их касательные плоскости T_x и T_y параллельны друг другу. При этом можно считать, что M_1 и M_2 не пересекаются друг с другом с $\mathbb{R}^N$, — например, лежат по разные стороны от гиперплоскости $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ (рис. 31).

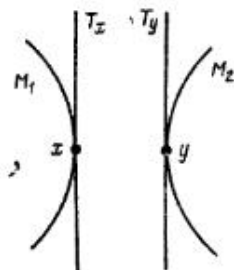


Рис. 31.

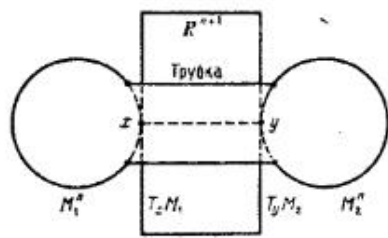


Рис. 32.

В силу параллельности касательных плоскостей T_x и T_y эти две n -мерные плоскости можно включить в $(n+1)$ -мерное евклидово подпространство $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$, причем можно считать, что отрезок $[x, y]$, соединяющий точки x и y в $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогонален T_x (в точке x) и T_y (в точке y). Теперь можно рассмотреть цилиндр достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ с осью $[x, y]$, основания которого — сферы S^{n-1} — расположены в T_x и в T_y (центрами сфер являются точки x и y). Построим новое n -мерное многообразие (обозначим его через $M_1 \# M_2$), вырезав из M_1 и M_2 диски радиуса ε с центром в x и с центром в y и соединив получившиеся $(n-1)$ -мерные сферы построенным выше цилиндром (см. рис. 32).

Отметим, что полученное многообразие $M_1 \# M_2$ определено однозначно (если M_1 и M_2 связны) в следующем смысле: при замене точек x, y на другие точки $x' \in M_1, y' \in M_2$, многообразие $M_1 \# M_2$ заменяется на диффеоморфное. Ясно, что операция $\#$ ассоциативна: $(M \# N) \# Q \approx M \# (N \# Q)$ (диффеоморфизм). Кроме того, операция $\#$ коммутативна.

Рассмотрим теперь с точки зрения операции взятия связной суммы введенные ранее операции приклейки ручки и пленки Мёбиуса. Ясно, что операция приклейки стандартной ручки $aba^{-1}b^{-1}$ эквивалентна взятию связной суммы исходного многообразия M^2 и тора T^2 . Далее: операция приклейки пленки Мё-

биуса эквивалентна взятию связной суммы исходного многообразия M^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (см. рис. 33).

Ясно, что $M^2 \# S^2 \approx M^2$ (диффеоморфизм); $M_{g_1}^2 \# M_{g_2}^2 \approx M_{g_1+g_2}^2$; $M_{\mu_1}^2 \# M_{\mu_2}^2 \approx M_{\mu_1+\mu_2}^2$; $M^2 \# M_{g=1}^2 \approx M^2 \# M_{\mu=3}^2$.

Так, например, бутылка Клейна есть связная сумма двух проективных плоскостей $\mathbb{R}P^2$ (см. выше).

Таким образом, множество классов диффеоморфных многообразий M^2 (многообразия предполагаются компактными замкнутыми связными) превращается в абелеву полугруппу P с двумя образующими: a (тор T^2) и b (проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$), между которыми есть одно соотношение: $a \# b = b \# b \# b$. (Докажите, что других соотношений нет.) В качестве нулевого элемента в полугруппе P выступает двумерная сфера.

Используя клеточные разбиения поверхностей, полученные выше, не представляет труда вычислить гомологии всех двумерных замкнутых поверхностей, а также фундаментальную группу:

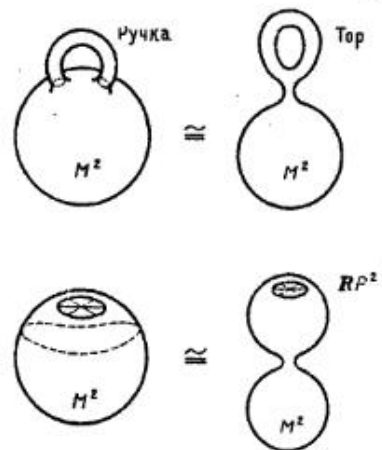


Рис. 33.

1. Сфера S^2 . Гомологии ее уже были вычислены: $H_0(S^2; \mathbb{Z}) = H_2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1 = 0$. Далее, мы знаем, что $\pi_1(S^2) = 0$ и $\pi_2(S^2) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

2. Ориентируемые поверхности M_g^2 . В силу ориентируемости имеем: $H_2(M_g^2; \mathbb{Z}) = H_0(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Фундаментальная группа задается в этом случае $2g$ образующими $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, и соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. В коммутированной группе $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1]$ это соотношение исчезает, и мы получаем $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ ($2g$ слагаемых).

3. Неориентируемые поверхности M_{μ}^2 . Здесь $H_0(M_{\mu}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_2(M_{\mu}^2; \mathbb{Z}) = 0$ в силу неориентируемости (см. § 3). В фундаментальной группе $\pi_1(M_{\mu}^2)$ имеется μ образующих $a_1, \dots, a_{\mu}$, связанных соотношением $a_1^2 a_2^2 \dots a_{\mu}^2 = 1$. В гомологиях $H_1(M_{\mu}^2; \mathbb{Z}) = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1]$ образующие $a_1, \dots, a_{\mu}$ коммутируют и связаны соотношением $2(a_1 + \dots + a_{\mu}) = 0$. Поэтому $H_1(M_{\mu}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$. Здесь образующие в группах $\mathbb{Z}$ — это $a_1, \dots, a_{\mu-1}$; образующая в группе $\mathbb{Z}_2$ — это $a_1 + \dots + a_{\mu}$.

Рассмотрим теперь так называемое «линзовое пространство» L_p , которое получается из сферы $S^3: |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ факторизацией по действию группы Z_p :

$$(z_1, z_2) \sim \left(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}} \right). \quad (19)$$

При $p = 2$ мы получим трехмерное проективное пространство RP^3 .

Для построения клеточного разбиения линзового пространства L_p разобьем сначала сферу S^3 следующим образом: пусть $q = 0, \dots, p-1$. Клетки σ_q^3 — такие точки (z_1, z_2) , что $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^2 — такие точки (z_1, z_2) , что

$$z_2 = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0, \varphi = \frac{2\pi q}{p}; \sigma_q^1$$

$$(z_1, 0), \text{ что } z_1 = e^{i\varphi}, \frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}; \sigma_q^0$$

$$\text{точки } \left(e^{\frac{2\pi i q}{p}}, 0 \right).$$

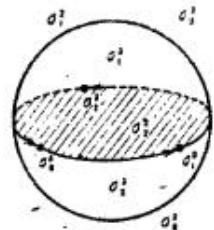


Рис. 34.

Это клеточное разбиение схематически изображено на рис. 34, где сфера S^3 отождествлена с трехмерным пространством, компактифицированным бесконечно удаленной точкой ($p = 3$).

При надлежащей ориентации этих клеток мы будем иметь:

$$\partial \sigma_q^3 = \sigma_{q+1}^2 - \sigma_q^2, \quad \partial \sigma_q^2 = \sigma_0^1 + \dots + \sigma_p^1, \quad \partial \sigma_q^1 = \sigma_{q+1}^0 - \sigma_q^0. \quad (20)$$

(Здесь $(q+1)$ приводится по модулю p .) После отождествления по действию группы Z_p клетки $\sigma_q^3, \sigma_q^2, \sigma_q^1, \sigma_q^0$ при разных q склеятся в одну. Мы получим клеточное разбиение линзы L_p , состоящее из четырех клеток: $\sigma^3, \sigma^2, \sigma^1, \sigma^0$, причем из формул (20) вытекает, что $\partial \sigma^3 = 0$, $\partial \sigma^2 = \rho \sigma^1$, $\partial \sigma^1 = 0$.

Отсюда следует:

$$H_3(L_p; Z) = Z = H_0(L_p; Z), \quad H_2(L_p; Z) = 0, \quad H_1(L_p; Z) = Z_p. \quad (21)$$

Для коэффициентов Z_p будем иметь:

$$H_i(L_p; Z_p) = Z_p, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Задача 8. Найти группы когомологий $H^i(L_p; Z)$.

Общим линзовым многообразием размерности $2n-1$ называется фактор сферы S^{2n-1} по действию группы Z_m , где действие образующей имеет вид

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_1}{m}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}} z_n \right). \quad (23)$$

При этом все числа $q_1, \dots, q_{n-1}$ должны быть взаимно просты с m , чтобы факторпространство было многообразием (проверьте). Это многообразие обозначается так:

$$S^{2n-1}/Z_m = L^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1}). \quad (24)$$

Очевидно, мы имеем $\pi_1(L^{2n-1}) = Z_m$.

Задача 9. Постройте на сфере S^{2n-1} клеточное разбиение, для которого группа Z_m действует, переставляя клетки свободно (т. е. порождает клеточное разбиение линзы). Вычислите гомологии линзовых многообразий.

Задача 10. Покажите, что для $q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = 1$ линзовое пространство является гладким расслоением с базой — CP^{n-1} и слоем — окружность S^1

$$L^{2n-1}(1, \dots, 1) \xrightarrow{p} CP^{n-1}, \quad F = S^1. \quad (25)$$

Задача 11. Вычислите кольцо когомологий линзовых пространств (с коэффициентами в группе $G = Z_m$).

Представляет интерес клеточное разбиение ряда гладких расслоений. Рассмотрим здесь простейшие случаи, когда слой F — это сфера S^{n-1} , разбитая на клетки $\sigma_F^0 \cup \sigma_F^{n-1} = S^{n-1}$. Важным примером является многообразие линейных элементов:

$$M^{2n-1} \xrightarrow{p} M^n, \quad \text{слой } F = S^{n-1}.$$

Если база M^n разбита на клетки σ_j^n , то клетки в расслоении M^{2n-1} определяются из условия

$$p^{-1}(\sigma_j^n) = \sigma_j^n \times F = \sigma_j^n \times (\sigma_F^0 \cup \sigma_F^{n-1}), \quad (26)$$

так как расслоение над диском тривиально (прямое произведение) — см. [1], ч. II, § 24. Итак, мы имеем клетки в M^{2n-1}

$$\sigma_j^n \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^n \times \sigma_F^{n-1}, \quad (27)$$

где σ_j^n — любая клетка (размерности n) в базе M^n . Однако вычислить граничный оператор от этих клеток трудно. Мы рассмотрим пример — пространство M^3 линейных элементов к замкнутой поверхности M_g^2 рода $g > 0$, со стандартным клеточным разбиением (см. выше):

$$M_g^2 = \sigma^0 \cup \{\sigma_j^1, j = 1, \dots, 2g\} \cup \sigma^2. \quad (28)$$

В пространстве M^3 мы получим клетки размерностей 0, 1, 2, 3

$$\sigma^0 \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^0, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^0, \quad (29)$$

$$\sigma^0 \times \sigma_F^1, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^1, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^1.$$

Вершина — одна $\sigma^0 \times \sigma_F^0$, все одномерные клетки — это циклы. Многообразие M^3 ориентируемо. Поэтому трехмерная клетка $\sigma_j^1 \times \sigma_F^1$ — это цикл. Проверьте, что клетка $\sigma_j^1 \times \sigma_F^1$ в слое —

это также цикл в гомологиях; однако в $\pi_1(M^3)$ граница $\partial(\sigma^1 \times \sigma^1_F)$ дает коммутатор путей σ^1 и σ^1_F . Клетка $\sigma^2 \times \sigma^0_F$ уже оказывается не циклом. Имеет место формула

$$\partial(\sigma^2 \times \sigma^0_F) = [(\partial\sigma^2) \times \sigma^0_F] \cup [\sigma^0 \times (\sigma^1_F)^{2-2g}]. \quad (30)$$

Символ $(\sigma^1_F)^{2-2g}$ означает, что в границу клетки $\sigma^2 \times \sigma^0_F$ одномерный цикл σ^1_F входит, пройденный $2 - 2g$ раз (при подходящей ориентации). Для $\partial\sigma^2$ мы имеем, выбрав одно из разбиений в базе M^2_g :

$$\partial\sigma^2 = \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = W(a, b), \quad (31)$$

где пути a_i представлены клетками σ^1_i , а пути b_i — клетками σ^1_{g+i} в базе M^2_g .

Задача 12. Докажите формулу (30) для границы клетки $\sigma^2 \times \sigma^0_F$, используя векторное поле на M^2_g , имеющее ровно одну особую точку со степенью $2 - 2g$ (см. [1], ч. II, § 15).

Для группы $\pi_1(M^3)$ имеем образующие $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \gamma$ (здесь γ — слой $F = S^1$) и соотношения

$$[a_i, \gamma] = a_i \gamma a_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \quad [b_i, \gamma] = b_i \gamma b_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \quad (32)$$

$$\gamma^{2-2g} = W(a, b) = \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i]. \quad (33)$$

Проверьте, что гомологии $H_i(M^3)$ имеют вид:

$$H_0 = Z, H_1 = \underbrace{Z + \dots + Z}_{2g \text{ штук}} + Z_{2g-2}, H_2 = \underbrace{Z + \dots + Z}_{2g \text{ штук}}, H_3 = Z. \quad (34)$$

§ 5. Сингулярные гомологии и когомологии.

Их гомотопическая инвариантность. Точная последовательность пар. Относительные гомологии

Наиболее общий способ гомотопически инвариантного определения гомологий и когомологий, который мы здесь изложим, не требует ни структуры многообразия, ни структуры симплицального или клеточного комплекса.

Пусть X — любое топологическое пространство.

Определение 1. Сингулярным k -мерным симплексом называется пара (σ^k, f) , где $f: \sigma^k \rightarrow X$ — непрерывное отображение k -мерного стандартного симплекса $\sigma = [\alpha_0 \dots \alpha_k]$ в пространство X . Сингулярной k -мерной цепью называется формальная конечная линейная комбинация $c_k = \sum_i g_i (\sigma^k_i, f_i)$, где g_i — эле-

менты аддитивно записанной абелевой группы G , а (σ^k_i, f_i) — сингулярные симплексы размерности k .

Границей сингулярного симплекса называется формальная линейная комбинация вида

$$\partial(\sigma^k, f) = \sum_i (-1)^i (\sigma^{k-1}_i, f|_{\sigma^{k-1}_i}),$$

где $\sigma^{k-1}_i = [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k]$ — i -я грань стандартного симплекса, $f|_{\sigma^{k-1}_i}$ — ограничение отображения f на грань σ^{k-1}_i (грань сингулярного симплекса, сама являющаяся сингулярным симплексом). Граница сингулярной цепи имеет вид, по определению:

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial(\sigma^k_i, f_i).$$

Из леммы 3.1 вытекает, что $\partial\partial c_k = 0$. Сингулярный цикл — это цепь c_k такая, что $\partial c_k = 0$. Сингулярная граница — цепь c_k такая, что $c_k = \partial c_{k+1}$. Сингулярная граница является циклом. Группы сингулярных (симплициальных) гомологий $H_k(X; G)$ — это классы эквивалентности k -мерных циклов с точностью до границ.

Группы сингулярных когомологий $H^k(X; G)$ определяются как и в § 2: коцепи — это линейные формы на цепях, и оператор δ сопряжен к ∂ . Удобство использования сингулярных гомологий состоит в том, что для любого непрерывного отображения пространств $\varphi: X \rightarrow Y$ индуцированные гомоморфизмы φ_* и φ^* групп сингулярных гомологий и когомологий

$$\varphi_*: H_k(X; G) \rightarrow H_k(Y; G), \quad (1)$$

$$\varphi^*: H^k(Y; G) \rightarrow H^k(X; G) \quad (1')$$

строятся очевидным образом. Здесь сингулярная цепь $c_k = \sum g_i (\sigma^k_i, f_i)$ переходит в сингулярную цепь $\varphi_*(c_k) = \sum g_i (\sigma^k_i, \varphi \circ f_i)$. Когомологии отображаются в обратную сторону: $\varphi^*: H^k(Y; G) \rightarrow H^k(X; G)$, где коцепь c^k переходит в $\varphi^*(c^k)$, причем $(\varphi^*(c^k), \tilde{c}_k) = (c^k, \varphi_*(\tilde{c}_k))$ по определению. Отображения φ_* и φ^* на цепях и коцепях перестановочны с граничным оператором и поэтому определены на классах гомологий и когомологий.

Из определения сингулярных гомологий (когомологий) очевидно следует, что топологически эквивалентные (гомеоморфные) пространства имеют одинаковые гомологии и когомологии. Докажем более сильное утверждение: гомотопическую инвариантность сингулярных гомологий (для когомологий все рассуждения аналогичны).

Теорема 1. Пусть $\varphi_0: X \rightarrow Y$, $\varphi_1: X \rightarrow Y$ — гомотопные отображения. Тогда индуцированные гомоморфизмы групп гомологий $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}: H_k(X; G) \rightarrow H_k(Y; G)$ совпадают: $\varphi_{0*} \equiv \varphi_{1*}$ (для когомологий $\varphi_0^* \equiv \varphi_1^*$).

Доказательство. Пусть I — отрезок $[0, 1]$; Φ — гомотопия, связывающая отображения φ_0 и φ_1 :

$$\Phi(x, t): X \times I \rightarrow Y, \quad \Phi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \Phi|_{t=1} = \varphi_1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \in X. \quad (2)$$

Для любого сингулярного симплекса (σ, f) определено отображение цилиндра $\sigma \times I$ в пространство Y :

$$\Phi(f \times 1)(\sigma, t) = \Phi(f(\sigma), t): \sigma \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y. \quad (3)$$

Разобьем цилиндр $\sigma \times I$ на симплексы: если $\sigma = [\alpha_0 \dots \alpha_k]$, то вершины в цилиндре $\sigma \times I$ будут иметь вид α_i^0 (нижнее основание) и α_i^1 (верхнее основание). Симплексы цилиндра $\sigma \times I$ имеют вид

$$\sigma_q = [\alpha_0^0 \dots \alpha_q^0 \alpha_{q+1}^1 \dots \alpha_k^1], \quad q = 0, \dots, k \quad (4)$$

(см. рис. 35 для $k = 1, 2$). Отображение $\Phi(f \times 1) = f$ определяет сингулярную симплициальную $(k+1)$ -цепь $D(\sigma, f)$:

$$D(\sigma, f) = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^k (-1)^q (\sigma_q, f). \quad (5)$$

Получаем гомоморфизм групп сингулярных цепей:

$$D: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y). \quad (6)$$

Лемма 1. *Имеет место тождество:*

$$D \circ \partial + (-1)^{k-1} \partial \circ D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим через $d[\alpha_0 \dots \alpha_k]$ сумму симплексов вида (4):

$$d[\alpha_0 \dots \alpha_k] = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^k (-1)^q [\alpha_0^0 \dots \alpha_q^0 \alpha_{q+1}^1 \dots \alpha_k^1]. \quad (8)$$

Кроме того,

$$\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k]. \quad (9)$$

Тогда

$$d\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k] + (-1)^{k-1} \partial d[\alpha_0 \dots \alpha_k] = [\alpha_0^1 \dots \alpha_k^1] - [\alpha_0^0 \dots \alpha_k^0]. \quad (10)$$

Это равенство геометрически очевидно: граница цилиндра $[\alpha_0 \dots \alpha_k] \times I$ состоит из цилиндра над границей симплекса $\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k]$ и верхнего и нижнего оснований с учетом знака. Из этого равенства вытекает утверждение леммы. Из леммы следует (см. § 2), что гомоморфизмы групп гомологий $\varphi_{\alpha*}$, $\alpha = 0, 1$, совпадают (для любого цикла z_k имеем $\varphi_{0*} z_k - \varphi_{1*} z_k = \partial D z_k$). Теорема доказана.

Следствие. *Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы сингулярных (симплициальных) гомологий (когомологий).*

Пример 1. Любое стягиваемое (по себе) пространство X гомотопически эквивалентно точке. Найдем сингулярные симплициальные гомологии точки ($X = *$).

Сингулярные k -симплексы точки $* = X$:

$$f: \sigma^k \rightarrow *; \quad (11)$$

мы имеем по одному сингулярному симплексу для каждой размерности k (так как отображение f всего одно). Граница симплекса (σ^k) имеет вид:

$$\partial(\sigma^k) = \sum_{q=0}^k (-1)^q (\sigma_q^{k-1}). \quad (12)$$

Поэтому мы имеем:

$$\partial(\sigma_k, f) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно или } k=0; \\ (\sigma^{k-1}, f), & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда: $H_0(*; G) = G$, $H_k(*; G) = 0$ при $k > 0$ (цикл (σ^{k-1}, f) при четных k является границей цепи (σ^k, f)).

Пример 2. Если пространство X линейно связно, то $H_0(X; G) = G$. Действительно, все нульмерные цепи являются циклами. Цепь вида $\sum g_i (\sigma^0, f_i)$, $f_i(\sigma^0) = x_i \in X$ является границей, если

и только если $\sum g_i = 0$. Любые два нульмерных симплекса (σ^0, f) и (σ^0, g) , $f(\sigma^0) = x_1$, $g(\sigma^0) = x_2$ гомологичны: если $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ — кривая, соединяющая точки x_1 и x_2 , то

$$(\sigma^0, g) - (\sigma^0, f) = \partial(\sigma^1, \varphi). \quad (14)$$

Поэтому цикл $\sum g_i (\sigma_0, f_i)$ гомологичен циклу $(\sum g_i) (\sigma^0, f)$. Следовательно, $H_0(X; G) = G$.

Аналогично доказывается, что для пространства X , состоящего из n компонент линейной связности, группа $H_0(X; G)$ является прямой суммой n экземпляров группы G .

Для некоторых целей более удобны сингулярные кубические гомологии и когомологии. Дадим их определение.

Стандартный единичный n -мерный куб I^n — это множество точек $(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $0 \leq x_i \leq 1$. Если $n = 0$, то I^0 — одна точка. Грань куба $\lambda_i I^n$ ($i = 1, \dots, n$, $\epsilon = 0, 1$) — это куб I^{n-1} , где $x_i = \epsilon$. Всего куб имеет $2n$ граней $\lambda_i I^n$.

Сингулярный n -куб в пространстве X — это пара (I^n, f) , где $f: I^n \rightarrow X$ — непрерывное отображение.

Грани сингулярного куба (I^n, f) имеют вид по определению

$$\lambda_i^\varepsilon(I^n, f) = (\lambda_i^\varepsilon I^n, f), \quad i = 1, \dots, n, \varepsilon = 0, 1. \quad (15)$$

Они называются i -й нижней ($\varepsilon = 0$) и i -й верхней границами сингулярного куба (I^n, f) . При $i < j$ имеет место простое тождество:

$$\lambda_i^\varepsilon \lambda_j^\eta = \lambda_{j-1}^\eta \lambda_i^\varepsilon, \quad \varepsilon, \eta = 0, 1. \quad (16)$$

Пусть $\hat{C}_n(X; G)$ — группа сингулярных кубических цепей размерности n с коэффициентами в группе G , т. е. группа формальных конечных линейных комбинаций вида

$$c_n = \sum g_i(I^n, f_i), \quad g_i \in G. \quad (17)$$

Граница сингулярного куба имеет вид

$$\partial(I^n, f) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\lambda_i^1(I^{n-1}, f) - \lambda_i^0(I^{n-1}, f)]. \quad (18)$$

Оператор ∂ продолжается на все цепи линейно. Из тождества (16) вытекает, что $\partial\partial(I^n, f) = 0$. Сингулярный n -куб (I^n, f) называется вырожденным, если отображение $f: I^n \rightarrow X$ разлагается в суперпозицию проекции на грань $I^n \rightarrow I^{n-1}$ и отображения $g: I^{n-1} \rightarrow X$.

Линейные комбинации вырожденных n -мерных сингулярных кубов образуют подгруппу $D_n(X; G)$ в группе цепей $\hat{C}_n(X; G)$. Так как оператор ∂ переводит вырожденный куб снова в вырожденный, то можно, факторизуя по вырожденным сингулярным кубам, определить группу «нормализованных» сингулярных кубических цепей $C_n(X; G)$, полагая

$$C_n(X; G) = \hat{C}_n(X; G)/D_n(X; G), \quad (19)$$

и граничный оператор $\partial: C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G)$ (который также будет обозначаться буквой ∂). По-прежнему $\partial\partial = 0$. Поэтому можно определить группу сингулярных кубических гомологий как группу нормализованных циклов с точностью до циклов, гомологичных нулю (аналогично определяются когомологии).

Покажем, что построенные группы гомологий также гомотопически инвариантны.

Теорема 2. Гомотопные отображения $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ топологических пространств индуцируют одинаковые гомоморфизмы $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$ групп сингулярных кубических гомологий и одинаковые гомоморфизмы групп кубических когомогий $\varphi_0^* = \varphi_1^*$.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству аналогичной теоремы для симплициального случая (выше). Необходимо построить оператор D алгебраической гомотопии, сопоставляющий каждому n -мерному сингулярному кубу в пространстве X $(n+1)$ -мерный сингулярный куб в простран-

стве Y . Если $\Phi: I \times X \rightarrow Y$ — гомотопия между отображениями φ_0, φ_1 , то оператор D определяется так:

$$D(I^n, f) = (I^{n+1}, \Phi(1 \times f)),$$

так как

$$I^{n+1} = I \times I^n, \quad 1 \times f: I^{n+1} \rightarrow I \times X.$$

Оператор D переводит вырожденные кубы снова в вырожденные (проверьте). Поэтому он определен и на группе нормализованных цепей.

Равенство

$$D\partial \pm \partial D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}$$

доказывается полностью аналогично лемме 1. Доказательство завершается, как для случая сингулярных симплициальных гомологий.

Пример 3. Вычислим сингулярные кубические гомологии точки $X = *$ (и, тем самым, гомологии любого стягиваемого пространства).

В каждой размерности n мы имеем ровно по одному кубу (I^n, f_n) , где $f_n(I^n) = *$. При $n > 0$ все такие кубы вырождены. Поэтому группы нормализованных кубических цепей имеют вид

$$C_0(X; G) = G = H_0(X; G), \quad C_n(X; G) = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Значит, кубические гомологии точки такие же, как в построенных выше симплициальных гомологиях.

Замечание. Если построить гомологии $\hat{H}_n(X; G)$, исходя из полных групп сингулярных кубических цепей $\hat{C}_n(X; G)$, то гомологии точки в такой теории будут нетривиальны.

Задача 1. а) Найти группу $\hat{H}_n(*; Z)$; б) доказать, что $\hat{H}_n(X; Z) = \sum_{k \geq 0} H_{n-k}(X, \hat{H}_k(*, Z))$ для любого пространства X .

Определим теперь относительные сингулярные гомологии. Определения здесь одинаковы и для симплициального и для кубического вариантов.

Пусть X — топологическое пространство, Y — его подпространство. Тогда группы сингулярных цепей $C_k(Y)$ лежат в группах $C_k(X)$. Рассмотрим группу относительных цепей $C_k(X, Y) = C_k(X)/C_k(Y)$ (коэффициентов G мы здесь явно не пишем, группа G произвольна). Граничный оператор ∂ переводит $C_k(Y)$ в $C_{k-1}(Y)$, поэтому он определяет некоторый граничный оператор $C_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X, Y)$ для факторгрупп. Этот гомоморфизм также обозначим через ∂ . Мы имеем комплекс относительных цепей* и сопряженный комплекс коцепей.

Как и ранее, мы определяем относительные циклы $Z_k(X, Y)$, для которых $\partial c_k = 0$. Относительные границы $B_k(X, Y) \subset$

$\subset Z_k(X, Y)$ имеют вид $c_k = \partial c_{k+1}$. Факторгруппа $H_k(X, Y) = Z_k(X, Y)/B_k(X, Y)$ называется группой относительных гомологий (размерности k).

Группа гомологий $H_k(X)$ имеет естественное отображение в группу относительных гомологий: каждый цикл из $H_k(X)$ можно рассматривать как относительный. Получаем гомоморфизмы

$$H_k(X) \xrightarrow{i} H_k(X, Y), \quad H^k(X, Y) \xrightarrow{j} H^k(X). \quad (20)$$

Кроме того, вложение пространств $Y \xrightarrow{i} X$, обозначаемое буквой i , определяет «гомоморфизм вложения»

$$H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X), \quad H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y). \quad (21)$$

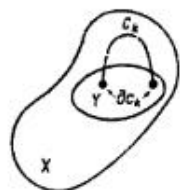


Рис. 36.

Построим теперь граничный гомоморфизм ∂_* , отображающий группу $H_k(X, Y)$ в группу $H_{k-1}(Y)$ (для когомологий — гомоморфизм ∂^* , отображающий $H^{k-1}(Y) \rightarrow H^k(X, Y)$). Пусть $c_k \in C_k(X, Y)$ — относительный цикл. Можно рассматривать его как обычную (или «абсолютную») цепь, т. е. как элемент из $C_k(X)$, определенную с точностью до произвольной цепи из $C_k(Y)$. Граница $c_{k-1} = \partial c_k$ — это $(k-1)$ -мерный цикл в Y . Тогда $\partial_*(c_k)$ соответствует классу гомологий цикла $c_{k-1} = \partial c_k$ по определению (см. рис. 36). Класс гомологий $\partial_* c_k$ не зависит от выбора представителя в классе c_k (проверьте). Получаем корректно определенный гомоморфизм

$$\partial_*: H_k(X, Y) \rightarrow H_{k-1}(Y). \quad (22)$$

Комбинируя гомоморфизмы i_* , j и ∂_* , получаем последовательность гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \dots \rightarrow H_0(Y) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, Y) \rightarrow 0. \quad (23)$$

Теорема 3. Последовательность (23) точна, т. е.

а) $\text{Ker } i_* = \text{Im } \partial_*$, б) $\text{Ker } j = \text{Im } i_*$, в) $\text{Ker } \partial_* = \text{Im } j$.

Доказательство. а) Проверим, что ядро $\text{Ker } i_*$ совпадает с образом $\text{Im } \partial_*$. Пусть $c_{k-1} \in C_{k-1}(Y)$ — цикл такой, что $i_*(c_{k-1}) = 0$. Это означает, что в пространстве X найдется цепь $c_k \in C_k(X)$ такая, что $\partial c_k = c_{k-1}$. Цепь c_k является поэтому относительным циклом, и класс гомологий цикла c_{k-1} совпадает с $\partial_*(c_k)$ по определению. Пункт а) доказан.

б) Пусть c_k — цикл в пространстве X такой, что $j(c_k) = 0$. Это означает, что $\partial c_k = 0$ и найдется цепь c_{k+1} в пространстве X и цепь $\tilde{c}_k$ в пространстве Y такие, что

$$\tilde{c}_k + \partial c_{k+1} = c_k.$$

Тогда $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k = 0$, поэтому $\tilde{c}_k$ — цикл в пространстве Y , гомологичный циклу c_k . Мы показали, что класс гомологии цикла c_k имеет представителя в пространстве Y , т. е. $c_k \in \text{Im } i_*$.

в) Пусть c_k — относительный цикл в $C_k(X, Y)$, причем $\partial_* c_k = 0$ в группе $H_{k-1}(Y)$. Это означает, что цикл ∂c_k гомологичен нулю в пространстве Y : $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k$, $\tilde{c}_k$ — цепь в $C_k(Y)$. Тогда цепь $c_k - \tilde{c}_k$ является «абсолютным» циклом в пространстве X и задает элемент, эквивалентный циклу c_k в относительной группе $H_k(X, Y)$. Таким образом, цикл $c_k \sim c_k - \tilde{c}_k$ лежит в образе гомоморфизма j . Точность в члене $H_0(X, Y)$ проверьте самостоятельно. Теорема полностью доказана. Для когомологий построение последовательности и проверка точности проводится аналогично.

Точная последовательность (23) называется точной (гомологической) последовательностью пары (X, Y) .

Обратим внимание, что если Y — симплициальный (клеточный) подкомплекс в симплициальном (клеточном) комплексе X , то гомоморфизмы гомологической (и когомологической) последовательности пары для симплициальных и клеточных гомологий определяются очевидным образом. Проверку точности получающихся последовательностей, полностью аналогичную доказательству теоремы 3, оставляем в виде упражнения.

С л е д с т в и е. Из точной последовательности пары следует равенство:

$$H_k(X, *) = H_k(X), \quad k > 0, \\ H_0(X, *) = 0, \quad k = 0, \quad (24)$$

где X — линейно связное пространство.

Доказательство. Действительно, при $k > 0$ имеем:

$$H_k(*) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, *) \rightarrow H_{k-1}(*) \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow \dots$$

При $k-1=0$ вложение $H_0(*) \rightarrow H_0(X)$ есть изоморфизм, как показывалось ранее. Поэтому для всех $k > 0$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H_k(X) \xrightarrow{i_*} H_k(X, *) \rightarrow 0. \quad (25)$$

Это немедленно дает изоморфизм этих групп, так как $\text{Ker } j = 0$ и $\text{Im } j = H_k(X, *)$.

Для $k=0$ имеем точную последовательность

$$H_0(*) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \rightarrow H_0(X, *) \rightarrow 0, \quad (26) \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ G \qquad \qquad G$$

где i_* — изоморфизм. Поэтому следствие доказано.

Чрезвычайно важным свойством относительных гомологий (когомологий) является их «естественность»: при непрерывных отображениях пар

$$(X, X') \xrightarrow{f} (Y, Y'), \quad (27)$$

где $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ и $f(X') \subset Y'$, мы имеем отображения

$$f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y), \quad f^*: H^k(Y) \rightarrow H^k(X), \quad (28)$$

$$f_*: H_k(X, X') \rightarrow H_k(Y, Y'), \quad f^*: H^k(Y, Y') \rightarrow H^k(X, X'), \quad (29)$$

$$f_*: H_k(X') \rightarrow H_k(Y'), \quad f^*: H^k(Y') \rightarrow H^k(X'). \quad (30)$$

Все построения гомоморфизмов точной последовательности были «естественными» — коммутировали с непрерывными отображениями. Поэтому имеется гомоморфизм точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \partial_*: H_k(X') & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{j_*} & H_k(X, X') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X') \rightarrow \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \partial_*: H_k(Y') & \xrightarrow{i_*} & H_k(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_k(Y, Y') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(Y') \rightarrow \end{array} \quad (31)$$

Для когомологий имеем аналогично:

$$\begin{array}{ccccccc} \partial^*: H^k(X, X') & \xrightarrow{j^*} & H^k(X) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X') & \xrightarrow{\partial^*} & H^{k+1}(X, X') \rightarrow \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ \partial^*: H^k(Y, Y') & \xrightarrow{j^*} & H^k(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^k(Y') & \xrightarrow{\partial^*} & H^{k+1}(Y, Y') \rightarrow \end{array} \quad (32)$$

Это свойство весьма полезно. Например, имеет место такое

Утверждение 1. Пусть имеется отображение пар

$$f: (X, X') \rightarrow (Y, Y'), \quad (33)$$

где гомоморфизм f_* является изоморфизмом для

$$H_k(X) \xrightarrow{f_*} H_k(Y) \quad \text{и} \quad H_k(X') \xrightarrow{f_*} H_k(Y'). \quad (34)$$

Тогда относительные группы $H_k(X, X')$ и $H_k(Y, Y')$ также изоморфны, и f_* дает их изоморфизм (аналогично для когомологий).

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (31). Если $\alpha \in H_k(X, X')$ и $f_*\alpha = 0$, то мы имеем:

$$f_*\partial_*\alpha = \partial_*f_*\alpha = 0. \quad (35)$$

Поэтому $f_*(\partial_*\alpha) = 0$, где $\partial_*\alpha \in H_{k-1}(X')$. Из условия (мы знаем, что $f_*: H_{k-1}(X') \rightarrow H_{k-1}(Y')$ есть изоморфизм) получаем $f_*(\partial_*\alpha) = 0 \Rightarrow \partial_*\alpha = 0$. Поэтому $\alpha = j_*(\beta)$. Так как $f_*(\alpha) = 0$, то мы имеем $f_*j_*(\beta) = j_*(f_*(\beta)) = 0$ и поэтому $f_*(\beta) = i_*(\gamma)$. Рассмотрим $\delta = f_*^{-1}(\gamma) \in H_k(X')$. Тогда $\beta = i_*(\delta)$ и $\alpha = j_*i_*(\delta) = 0$. Поэтому $\alpha = 0$, если $f_*(\alpha) = 0$.

Докажем, что любой элемент γ из группы $H_k(Y, Y')$ имеет вид $\gamma = f_*(\delta)$. Если $\partial_*\gamma = 0$, то $\gamma = j_*(\beta)$. Рассмотрим элемент $j_*^{-1}(\beta) = \alpha$. Мы имеем $f_*(\alpha) = \gamma$. Если $\partial_*\gamma \neq 0$, то введем элемент $f_*^{-1}(\partial_*\gamma) = \partial_*\beta$. Тогда образ $f_*(\beta)$ таков, что $\partial_*(f_*(\beta) - \gamma) = 0$. Тем самым утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Утверждение и его доказательство остаются верны в такой форме: если потребовать изоморфность отображений в гомологиях на любой паре из трех групп $H_*(X)$, $H_*(X')$, $H_*(X, X')$, то третье отображение в гомологиях также будет изоморфизмом. Для когомологий все аналогично.

Далее будет показано, что сингулярные гомологии совпадают с клеточными и симплициальными для клеточных и симплициаль-

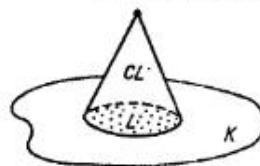


Рис. 37. $K \cup CL$.

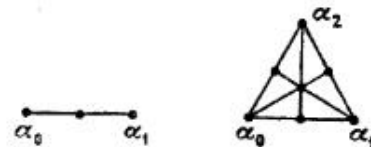


Рис. 38.

ных комплексов, используя формальные свойства гомологий, установленные выше, и одно важное их свойство, которое мы сейчас докажем.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 4. Пусть K — клеточный комплекс, L — его подкомплекс. Тогда верно равенство

$$H_k(K, L) = H_k(K/L), \quad k > 0. \quad (36)$$

Через K/L обозначено факторпространство, полученное стягиванием всего L в точку. Заметим, что K/L гомотопически эквивалентно клеточному комплексу $K \cup CL$ (см. рис. 37), где CL — конус над L , получающийся из $L \times I$ стягиванием верхнего основания в точку.

Дадим доказательство для симплициальных (сингулярных) гомологий. Введем оператор барицентрического подразделения.

Определим подразделение симплекса $[\alpha_0 \dots \alpha_k] = \sigma^k$. Подразделением одномерного симплекса называется его разбиение на два с новой вершиной в центре. Чтобы подразделить двумерный симплекс $[\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2]$ (треугольник), подразделим сначала все одномерные грани. Возьмем затем новую вершину в середине треугольника и соединим со всеми вершинами на гранях — старыми и новыми (см. рис. 38). Дальше поступаем аналогично: берем точку в центре k -мерного симплекса; грани уже подразделены. Совокупность лучей, соединяющих эту новую вершину с симплексом σ_i^{k-1} на границе и дает новые симплексы σ_i^k в барицентрическом подразделении.

Пусть (σ^k, f) — сингулярный симплекс в пространстве X . Пусть $\sigma_1^k, \dots, \sigma_N^k$ — все k -мерные симплексы барицентрического подразделения симплекса σ^k . Обозначим через $\beta(\sigma^k, f)$ цепь вида

$$\beta(\sigma^k, f) = \sum_{i=1}^N (\sigma_i^k, f|_{\sigma_i^k}) \quad (37)$$

(сумма берется по всем симплексам подразделения σ^k). Оператор β продолжается линейно на всю группу сингулярных симплициальных цепей $C_k(X)$:

$$\beta: C_k(X) \rightarrow C_k(X), \quad k = 0, 1, \dots \quad (38)$$

Имеет место

Лемма 2. Оператор β коммутирует с граничным гомоморфизмом ∂ и алгебраически гомотопен тождественному оператору.

Доказательство. Равенство $\partial\beta = \beta\partial$ очевидно («внутренние» грани

подразделения симплекса входят в цепь $\partial\beta$ дважды с разными знаками). Построим алгебраическую гомотопию D такую, что $\partial D \pm D\partial = \beta - 1$. Определим для этого триангуляцию прямого произведения $\sigma^k \times I$ симплекса σ^k на отрезок I такую, что $\sigma^k \times 0$ есть один симплекс, а $\sigma^k \times 1$ есть барицентрическое подразделение σ^k . Для $k = 0, 1, 2$ триангуляция $\sigma^k \times I$ указана на рис. 39. В общем случае триангуляция $\sigma^k \times I$ строится так: пусть построена триангуляция симплекса $\sigma^{k-1} \times I$; тем самым боковые грани в $\sigma^k \times I$ уже триангулированы. Нижнее основание $\sigma^k \times 0$ оставляем без изменений; на верхнем основании возьмем барицентрическое подразделение. Теперь уже вся граница $\partial(\sigma^k \times I)$ триангулирована. Соединяя центр верхнего основания со всеми вершинами триангуляции границы $\partial(\sigma^k \times I)$, получим триангуляцию $\sigma^k \times I$.

Пусть (σ^k, f) — сингулярный симплекс в пространстве X . Определено «тривиальное» отображение:

$$f: \sigma^k \times I \rightarrow X, \quad f(x, t) = f(x). \quad (39)$$

Обозначим через $D(\sigma^k, f)$ $(k+1)$ -мерную цепь $(\sigma^k \times I, f) = D(\sigma^k, f)$, где $\sigma^k \times I$ триангулировано так, как указано выше. Оператор D по построению задает искомую гомотопию. Лемма доказана.

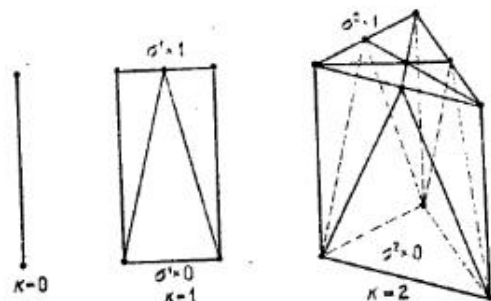


Рис. 39.

Доказательство теоремы. В силу гомотопической инвариантности гомологий имеем равенство:

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K \cup CL, *),$$

так как конус CL стягивается в точку. Кроме того,

$$H_k(K \cup CL, *) = H_k(K \cup CL) = H_k(K/L)$$

при $k > 0$ (см. следствие из теоремы 3). Достаточно доказать, что

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K, L). \quad (40)$$

Пусть c^k — любой k -мерный относительный цикл в $H_k(K \cup CL, CL)$. Построим цикл, гомологичный c^k , лежащий в группе $H_k(K, L)$.

Разобьем конус CL на две половины C_1L и C_2L (см. рис. 40). В силу леммы 2 можно заменить цикл c^k на гомологичный ему цикл $\beta^N c^k$, у которого симплексы будут мелки. Увеличивая N (итерирова подразделение), получим, что симплекс, пересекающийся с C_1L , целиком лежит в конусе CL . Выкинем все симплексы, пересекающиеся с C_1L . Этим мы не изменим класса относительных (modulo CL) гомологий цикла $\beta^N c^k \sim c^k$. Полученный цикл $\tilde{c}^k$ лежит уже в группе $H_k(K \cup C_2L, C_2L) = H_k(K, L)$ (так как C_2L стягивается на L). Тем самым построен цикл $\tilde{c}^k$ в группе $H_k(K, L)$, гомологичный циклу c^k .

Если цикл c^k для пары (K, L) гомологичен нулю в группе $H_k(K \cup CL, CL)$, то идентичное рассуждение применяется для того, чтобы «снять» ограничивающую цепь с верхней вершины конуса — подразделяя c^k и ограничивающую его цепь.

Теорема доказана.

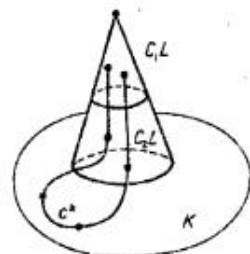


Рис. 40.

§ 6. Сингулярные гомологии клеточных комплексов.

Их совпадение с клеточными гомологиями.

Двойственность Пуанкаре для симплициальных гомологий.

Вычислим сингулярные гомологии сфер S^n , $n = 1, 2, \dots$ Всюду в этом параграфе в качестве группы коэффициентов мы будем брать группу целых чисел.

Теорема 1. Имеет место равенство при $n > 0$

$$H_i(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0, \quad i=n, \\ 0, & i \neq 0, \quad n. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Вычислим гомологии окружности S^1 из точной последовательности пары $(D^1, \partial D^1)$,

где $\partial D^1 = S^0$ — двоеточие, причем $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1)$ в силу теоремы 5.4. Имеем:

$$H_1(D^1) \rightarrow H_1(D^1, S^0) \rightarrow H_0(S^0) \rightarrow H_0(D^1) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Но $H_1(D^1) = 0$, $H_0(D^1) = \mathbb{Z}$, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, поскольку S^0 состоит из двух связных компонент. Поэтому последовательность (2) принимает вид

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (3)$$

откуда $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. При $k > 1$ имеем:

$$H_k(D^1) \rightarrow H_k(D^1, S^0) \rightarrow H_{k-1}(S^0), \quad (4)$$

где $H_k(D^1) = H_{k-1}(S^0) = 0$, значит, $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1) = 0$. Гомологии окружности вычислены.

Пусть для гомологий сферы S^{n-1} теорема уже доказана. Из точной последовательности пары (D^n, S^{n-1}) мы будем иметь

$$\dots \rightarrow H_k(D^n) \rightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(D^n) \rightarrow \dots \quad (5)$$

При $k > 1$ мы получаем точную последовательность вида

$$0 \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0, \quad (6)$$

откуда $H_k(S^n) = H_{k-1}(S^{n-1})$, $k > 1$. При $k = 1$ получаем последовательность

$$H_1(D^n) \rightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(D^n) \rightarrow 0,$$

т. е.

$$0 \rightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

В силу точности этой последовательности гомоморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ является изоморфизмом, поэтому $H_1(D^n, S^{n-1}) = H_1(S^n) = 0$. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы и для сферы S^n . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отождествим n -мерный симплекс σ^n с диском D^n ; тогда тождественное отображение $\sigma^n \rightarrow \sigma^n$ определяет относительный сингулярный цикл в группе $H_n(D^n, S^{n-1}) = H_n(S^n)$. Этот цикл — образующая в группе сингулярных гомологий $H_n(S^n)$.

З а д а ч а 1. Пусть $\sigma^n = [\alpha_0 \dots \alpha_n]$ — n -мерный симплекс; P — некоторая перестановка вершин $\alpha_0 \dots \alpha_n$. P определяет отображение $\sigma^n \rightarrow \sigma^n$. Вычислить соответствующий элемент в группе $H_n(S^n)$.

С л е д с т в и е 1. Сингулярные гомологии букета n -мерных сфер $S_1^n, \dots, S_N^n$ имеют вид:

$$H_k\left(\bigvee_i S_i^n\right) = 0, \quad k \neq 0, n, \quad H_0\left(\bigvee_i S_i^n\right) = \mathbb{Z}, \quad H_n\left(\bigvee_i S_i^n\right) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{N \text{ раз}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пару: $(\bigcup_i D_i^n = K, \bigcup_i \partial D_i^n = L)$. Очевидно, мы имеем $H_i(K, L) = \sum H_i(D_i^n, \partial D_i^n)$. При $j > 0$, согласно теореме, имеем $H_j(D^n, \partial D^n) = H_j(S^n)$. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 2. Отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ степени $\deg f$ определяет гомоморфизм $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$, являющийся умножением на число $\deg f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение f степени $k = \deg f$ сферы S^n в себя можно построить так, как показано на рис. 41 (любое другое отображение степени k гомотопно этому). Здесь все сферы букета отображаются в одну, тождественно на каждом слагаемом. Отображение сферы в букет k сфер переводит образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ в сумму всех образующих букета. Отображение букета сфер в сферу переводит каждую образующую в n -мерных гомологиях букета в образующую группы $H_n(S^n)$. Поэтому сквозное отображение $H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ умножает образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ на $k = \deg f$. Отсюда вытекает требуемое следствие.

Рис. 41.

С л е д с т в и е 3. Для клеточного комплекса K имеем

$$H_j(K_n, K_{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, & j = n, \end{cases} \quad (7)$$

где число слагаемых равно числу n -мерных клеток.

Доказательство немедленно вытекает из следствия 1 и теоремы 1.

Т е о р е м а 2. Сингулярные гомологии клеточного комплекса совпадают с клеточными гомологиями.

С л е д с т в и е. Клеточные гомологии гомотопически инвариантны. Симплициальные гомологии являются частным случаем клеточных и тем самым также совпадают с сингулярными и гомотопически инвариантны.

Первоначально мы дадим доказательство теоремы для симплициальных комплексов, которое весьма просто следует из уже доказанных фактов. Каждый симплекс может рассматриваться как сингулярный симплекс (σ^k, f) . Это дает вложение комплекса симплициальных цепей в сингулярные

$$C^{\text{симпл}}(K) \rightarrow C^{\text{синг}}(K), \quad (8)$$

которое, очевидно, коммутирует с граничным оператором ∂ . Поэтому имеем отображение гомологий

$$H_k^{\text{симпл}}(K) \rightarrow H_k^{\text{синг}}(K). \quad (9)$$

Если L — симплициальный подкомплекс в K , то имеем отображение относительных групп

$$H_k^{\text{симпл}}(K, L) \rightarrow H_k^{\text{синг}}(K, L) \quad (10)$$

и всей точной последовательности пары (K, L) . Пусть, по индукции, теорема доказана для комплексов размерности $\leq n-1$. Для n -мерных комплексов K_n имеем отображение точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} H_{j+1}^{\text{симпл}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_j^{\text{симпл}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{симпл}}(K^n) & \rightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \rightarrow H_{j+1}^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) & \rightarrow & H_j^{\text{синг}}(K^{n-1}) & \rightarrow & H_j^{\text{синг}}(K^n) & \rightarrow & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \rightarrow H_j^{\text{симпл}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{симпл}}(K^{n-1}) & \rightarrow & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \rightarrow H_j^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{синг}}(K^{n-1}) & \rightarrow & \end{array} \quad (11)$$

Мы знаем следующее: а) по индукции $H_j^{\text{симпл}}(K^{n-1}) \approx H_j^{\text{синг}}(K^{n-1})$;

$$б) H_j^{\text{симпл}}(K^n, K^{n-1}) = H_j^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ Z + \dots + Z, & j = n \end{cases}$$

(число слагаемых равно числу симплексов размерности n) как показано выше. Вследствие этого, имея отображение точных последовательностей (11), мы заключаем, что отображение

$$H_j^{\text{симпл}}(K^n) \rightarrow H_j^{\text{синг}}(K^n) \quad (12)$$

есть изоморфизм для всех j (см. утверждение 5.1).

Для симплициальных комплексов теорема доказана.

Доказательство. Пусть K — общий клеточный комплекс, K^n — его n -мерный остов, т. е. объединение всех клеток размерности не выше n . Тогда K^n/K^{n-1} есть букет n -мерных сфер, по одной сфере на каждую n -мерную клетку. Из теоремы 5.4 и теоремы 1 получаем:

$$H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K), \quad H_i(K^n, K^{n-1}) = 0, \quad i \neq n \quad (13)$$

(коэффициенты целые), где $C_n(K)$ — группа клеточных цепей. Определен гомоморфизм $\partial = j \cdot \partial_*$

$$C_n(K) \approx H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \approx C_{n-1}(K) \quad (14)$$

как суперпозиция

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}).$$

Лемма 1. Оператор $\partial: C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$, задаваемый формулой $\partial = j\partial_*$, совпадает с граничным оператором в комплексе клеточных цепей.

Доказательство. Пусть σ^n — n -мерная клетка в комплексе K . Она является образующей в группе $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^{n-1}) \subset H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$. При граничном гомоморфизме $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ σ^n перейдет в образующую группы $H_{n-1}(S^{n-1})$. Ее образ в группе $H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K)$ имеет вид

$$\partial\sigma^n = \sum_i [\sigma^n: \sigma_i^{n-1}] \sigma_i^{n-1} \quad (15)$$

(сумма по всем клеткам размерности $n-1$) в силу следствия 2 из теоремы 1. Здесь $[\sigma^n: \sigma_i^{n-1}]$ — коэффициент инцидентности клеток, вычисляемый как степень отображения $\partial\sigma^n \rightarrow K^{n-1}/K^{n-2}$ на i -м слагаемом (см. § 5). Формула (15) совпадает с определенным ранее в § 4 граничным оператором в клеточных цепях. Лемма доказана.

Клеточные гомологии обладают свойствами:

а) они равны нулю в размерностях, больших, чем размерность комплекса $H_j^{\text{клет}}(K^n) = 0, j > n$.

б) группа $H_n^{\text{клет}}(K^n)$ изоморфна группе циклов $Z_n^{\text{клет}} \subset C_n(K^n)$, так как границ нет.

в) группа $H_j^{\text{клет}}(K^n)$ зависит только от остова K^{j+1} , т. е. эта группа одна и та же для $K^{j+1}, K^{j+2}, \dots, K^{n-1}, K^n$.

Пусть, по индукции, для комплексов размерности $\leq n-1$ совпадение клеточных и сингулярных гомологий уже доказано. Рассмотрим пару (K^n, K^{n-1}) :

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_*} H_j^{\text{синг}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{синг}}(K^n) & \xrightarrow{j} & \\ & & \downarrow & & \\ & & \rightarrow H_j^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{синг}}(K^{n-1}) \rightarrow \end{array} \quad (16)$$

Мы имеем $H_j^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) = 0$ при $j \neq n$. Поэтому из (16) мы заключаем

$$H_j^{\text{синг}}(K^n) = H_j^{\text{синг}}(K^{n-1}) \quad \text{при } j \neq n-1, n. \quad (17)$$

Отсюда имеем

$$H_j^{\text{синг}}(K^n) = \begin{cases} 0, & j \geq n+1, \\ H_j^{\text{синг}}(K^{n-1}) = H_j^{\text{клет}}(K^{n-1}), & j \leq n-2. \end{cases} \quad (18)$$

Остаются размерности $j = n, n-1$.

Имеем из (16):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H_n^{\text{синг}}(K^n) & \rightarrow & H_n^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}^{\text{синг}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 \rightarrow H_n^{\text{синг}}(K^n) & \rightarrow & C_n^{\text{клет}}(K^n) & \xrightarrow{\partial} & Z_{n-1}^{\text{клет}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \\
 & & & & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}^{\text{синг}}(K^n) & \rightarrow H_{n-1}^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) \\
 & & & & \parallel & & \parallel \\
 & & & & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}^{\text{синг}}(K^n) & \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Отсюда получаем вывод, используя лемму 1 о совпадении граничного гомоморфизма ∂ в клеточных цепях с гомоморфизмом

$$j\partial_*: H_n^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{синг}}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}^{\text{синг}}(K^n, K^{n-1}):$$

а) группа $H_n^{\text{синг}}(K^n)$ лежит в $C_n^{\text{клет}}(K^n)$ как ядро ∂ — т. е. совпадает с $H_n^{\text{клет}}(K^n)$.

б) группа $H_{n-1}^{\text{синг}}(K^n)$ совпадает с $Z_{n-1}^{\text{клет}}/\text{Im } \partial$ и тем самым совпадает с $H_{n-1}^{\text{клет}}(K^n)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы для когомологий полностью аналогично.

Важное замечание. Для приведенного здесь доказательства теоремы о совпадении клеточных гомологий с сингулярными симплициальными явная конструкция этих гомологий не существенна. Важны лишь формальные свойства этих теорий гомологий. Выделение этих свойств в чистом виде позволяет дать «аксиоматическое» определение теории гомологий (Стинрод—Эйленберг). Это определение таково.

а) Теорией гомологий назовем «функцию» (по-другому: «функтор»), сопоставляющую каждому клеточному комплексу K (или каждой паре (K, L) , где $L \subset K$ — подкомплекс) набор абелевых групп $H_i(K)$ (или $H_i(K, L)$), $i = 0, 1, 2, \dots$, и каждому непрерывному (можно считать его клеточным) отображению комплексов $f: K \rightarrow K'$ (или $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$, где $f(L) \subset L'$) набор гомоморфизмов

$$\begin{aligned}
 f_*: H_i(K) &\rightarrow H_i(K'), \\
 f_*: H_i(K, L) &\rightarrow H_i(K', L'), \quad i = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Требуется, чтобы суперпозиции отображений соответствовала суперпозиция гомоморфизмов

$$(fg)_* = f_*g_*; \quad (19)$$

тождественному отображению должен соответствовать тождественный гомоморфизм: $1_* = 1$.

б) Введенная теория гомологий должна обладать следующими свойствами («аксиомы теории гомологий»):

1. *Гомотопическая инвариантность.* Если отображения f и g гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают:

$$f \sim g \Rightarrow f_* = g_*.$$

2. *Определены граничные операторы*

$$\partial: H_m(K, L) \rightarrow H_{m-1}(L), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где L — подкомплекс в комплексе K , коммутирующие с непрерывными отображениями пар комплексов, т. е.

$$\partial f_* = f_*\partial; \quad f: (K, L) \rightarrow (K', L'), \quad f(L) \subset L'.$$

3. *Точность.* Обозначим через i, j очевидные вложения

$$L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} (K, L).$$

Требуется, чтобы последовательность групп и гомоморфизмов

$$\begin{aligned}
 \dots \rightarrow H_{m+1}(K, L) &\xrightarrow{\partial} H_m(L) \xrightarrow{i_*} H_m(K) \xrightarrow{j_*} \\
 &\xrightarrow{i_*} H_m(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(L) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

была точной.

4. *Вырезание.* $H_m(K, L) = H_m(K/L, *)$, где L — подкомплекс в K , K/L — факторкомплекс, где L стянут в точку $*$.

5. *Нормировка.* $H_m(*) = 0$ при $m > 0$ (здесь $*$ — одна точка).

Задача 2. Докажите, что перечисленными свойствами теории гомологий определяется однозначно, если $H_0(*) = G$ — заданная группа.

Для клеточных и сингулярных гомологий все эти свойства выполняются (см. §§ 4, 5); именно поэтому они и совпадают между собой. В § 5 обсуждался также пример кубических сингулярных гомологий (не приведенных), где не выполняется аксиома нормировки (гомологии точки нетривиальны в положительных размерностях).

Если отбросить в определении теории гомологий условие нормировки, то получится определение *экстраординарной теории гомологий*. Кубические сингулярные гомологии — это «тривиальный» пример экстраординарной теории гомологий (см. задачу в § 5). Другой гораздо более сложный (и более важный) пример экстраординарной теории гомологий — теория бордизмов — встретится в гл. 3.

По аналогии с определением теории гомологий дается аксиоматическое определение теории когомологий (точную формулировку аксиом, а также доказательство теоремы единственности теории когомологий мы оставляем в виде упражнения). На этом

пути можно получить доказательство совпадения когомологий многообразий, определенных в § 1 через дифференциальные формы, с другими видами когомологий. Нужно лишь превратить любой комплекс в многообразие, беря малую окрестность его вложения в евклидово пространство. Мы не проводим здесь аккуратно таких рассуждений, так как в § 14 будет указан другой более конструктивный путь доказательства совпадения когомологий, определенных через формы, с другими видами когомологий.

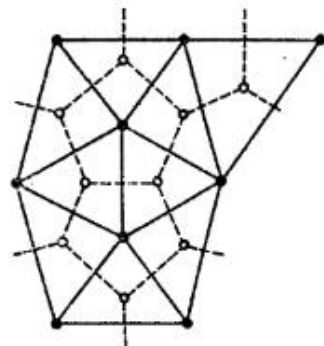


Рис. 42. Исходная триангуляция M^2 показана сплошными линиями; двойственное разбиение — прерывистыми линиями.

$D(\sigma_\alpha^k) = \bar{\sigma}_\alpha^{n-k}$, являющиеся клетками размерности $n-k$.

а) n -мерному симплексу σ_α^n двойственна вершина $D\sigma_\alpha^n$ барицентрического подразделения, лежащая в центре симплекса σ_α^n ;

б) 0-мерному симплексу σ_α^0 двойственна n -мерная клетка (многогранник) $D\sigma_\alpha^0$, представляющая собой сумму всех симплексов барицентрического подразделения с вершиной σ_α^0 (см. рис. 42 для $n=2$).

в) ребру σ_α^1 в M^n соответствует $(n-1)$ -мерная клетка $D\sigma_\alpha^1$, являющаяся суммой всех симплексов размерности $n-1$ барицентрического подразделения, имеющих центр ребра σ_α^1 своей вершиной и подходящие трансверсально к этому ребру;

г) грани σ_α^{n-1} в M^n соответствует 1-мерная клетка $D\sigma_\alpha^{n-1}$, состоящая из всех (в данном случае двух) 1-мерных симплексов барицентрического подразделения, имеющих центр σ_α^{n-1} вершиной и трансверсально подходящие к σ_α^{n-1} (см. рис. 42).

д) Дальнейшее обобщение очевидно: симплексу σ_α^k в M^n двойственна клетка $D\sigma_\alpha^k$ размерности $n-k$, являющаяся суммой всех симплексов подразделения, имеющих центр σ_α^k своей вершиной и трансверсально подходящих к этому центру. Клетки $D\sigma_\alpha^k$ разбивают M^n в комплекс (многогранников).

Укажем одно приложение оператора барицентрического подразделения симплициального комплекса в случае многообразий — «двойственность Пуанкаре» — см. также § 18. Пусть гладкое многообразие триангулировано — т. е. превращено в симплициальный комплекс, состоящий из гладких симплексов. Предположим, что подразделение достаточно мелко (если нужно, произведем для этого несколько раз барицентрическое подразделение). Пусть σ_α^k — симплекс в M^n . Определим двойственные многогранники

Свойства оператора D .

- 1) Пересечение $\sigma_i^k \cap D\sigma_i^k$ есть одна точка (центр σ_i^k).
- 2) Если не следить за знаками, верно равенство

$$(\partial\sigma_i^k) \cap D\sigma_i^{k-1} = \sigma_i^k \cap (\partial D\sigma_i^{k-1}) \pmod{2}. \quad (20)$$

Свойства 1) и 2) непосредственно очевидны для размерностей $n=1, 2, 3$. Легко понять, что они верны и для всех $n > 3$.

Свойство 1) позволяет нам определить билинейное скалярное произведение $a \circ b$, где $a \in C_l(M^n)$ — цепь, и $b \in C_D^{n-l}(M^n)$ — коцепь на двойственном комплексе из клеток $D\sigma_\alpha^l$, $a = \sum \lambda_i \sigma_i^l$,

$b = \sum \mu_k D\sigma_k^l$. (В последнем равенстве подразумевается, что клетке $D\sigma_k^l$ сопоставлена коцепь, обозначаемая тем же символом, которая имеет значение 1 на одной этой клетке и 0 на остальных.

Такие коцепи $D\sigma_k^l$ образуют базис в группе C_D^{n-l} .) Пусть λ и μ — вычеты modulo 2. Полагаем

$$\sigma_i^l \circ D\sigma_k^l = \delta_{ik} \pmod{2}, \quad (21)$$

$$a \circ b = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k \delta_{ik}. \quad (22)$$

Из свойства 2) следует, по определению,

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b), \quad (23)$$

т. е. граничные операторы сопряжены. Из (23) следует:

$$H_l(M^n; Z_2) \stackrel{D}{=} H^{n-l}(M^n; Z_2), \quad (24)$$

так как оба комплекса являются клеточными разбиениями одного и того же многообразия M^n и имеют одинаковые гомологии в каждой размерности. Это — следствие теоремы о гомотопической инвариантности клеточных гомологий. Изоморфизм (24) называется «двойственностью Пуанкаре». Для ориентируемых многообразий (23) и (24) имеют место над Z . Ниже — см. § 18 — двойственность Пуанкаре будет выводиться несколько иначе.

Мы неоднократно, еще до точного определения групп гомологий, использовали термины « k -мерный цикл» и « $(k+1)$ -мерная пленка» в многообразии M^n , понимая под этим следующее:

«цикл» задается как (M^k, f) , где M^k — ориентированное замкнутое многообразие и его отображение $f: M^k \rightarrow M^n$.

«пленка» (W^{k+1}, f) задается как ориентированное компактное многообразие W^{k+1} с краем и отображение $f: W^{k+1} \rightarrow M^n$. «Пленка» имеет границу

$$\partial(W^{k+1}, f) = (\partial W^{k+1}, f|_{\partial W^{k+1}}). \quad (25)$$

«Группа циклов» — это формальные суммы «циклов»

$$\sum_i (M_i^k, f_i). \quad (26)$$

Факторизуя по циклам, эквивалентным нулю, — т. е. границам (25), мы получим группы наподобие гомологий, именуемые «бордизмами», и обозначаемые через $\Omega_k(M^n)$. Можно определить бордизмы для любого комплекса $\Omega_k(X)$, естественно вводятся «относительные бордизмы» $\Omega_k(X, Y)$. Для бордизмов верна теорема о гомотопической инвариантности, имеет место точная последовательность пары (X, Y) и даже свойство $\Omega_*(X, Y) = \Omega_*(X/Y)$. Однако для стягиваемых пространств (например, точки *) бордизмы оказываются нетривиальными в положительных размерностях. Причина очень проста: далеко не каждое замкнутое многообразие M^k является границей $(k+1)$ -мерного многообразия с краем. Например, если многообразие M^4 является краем пленки W^5 , то класс $p_1(M^4) = 0$. В частности, CP^2 не является краем (детали см. в § 27).

Аналогично определяются «бордизмы по модулю 2» или «неориентируемые бордизмы», где циклы (M^k, f) — это отображения $M^k \xrightarrow{f} X$ всех замкнутых многообразий (не только ориентированных), и пленки также берутся неориентированными. Они обозначаются через $N_k(X)$.

Задача 3. Докажите, что RP^3 не является краем никакого 3-мерного многообразия. Докажите, что все его прямые произведения на себя $RP^3 \times \dots \times RP^3$ также не являются краями.

Задача 4. Докажите, что если многообразие M^k есть край, т. е. $M^k = \partial W^{k+1}$, то эйлерова характеристика $\chi(M^k)$ четна. Имеются естественные гомоморфизмы

$$\Omega_k(X) \rightarrow H_k(X; Z) \rightarrow H_k(X; R), \quad N_k(X) \rightarrow H_k(X; Z_2). \quad (27)$$

Говорят, что классы гомологий из образа этих гомоморфизмов — это «циклы, реализуемые в виде непрерывного образа многообразия», т. е. то самое, что интуитивно мы понимали под циклом раньше. Однако исследование самих бордизмов и задач, где они используются, более сложно (см. § 27).

§ 7. Гомологии прямого произведения. Умножение в когомологиях. Когомологии H -пространств и групп Ли. Когомологии унитарной группы

Пусть K_1 и K_2 — клеточные комплексы. Их прямое произведение $K_1 \times K_2$ снова является клеточным комплексом, его клетки — это произведения клеток комплексов K_1 и K_2 . Поэтому группа целочисленных клеточных цепей $C_n(K_1 \times K_2; Z)$ имеет вид

$$C_n(K_1 \times K_2; Z) = \sum_{k+l=n} C_k(K_1; Z) \otimes C_l(K_2; Z).$$

Граница произведения двух клеток $\sigma^i \times \sigma^l$ находится по формуле

$$\partial(\sigma^i \times \sigma^l) = (\partial\sigma^i) \times \sigma^l \cup (-1)^i \sigma^i \times (\partial\sigma^l)$$

(знак $(-1)^i$ учитывает ориентацию). Отсюда получаем

Утверждение 1. Комплекс целочисленных цепей прямого произведения $K_1 \times K_2$ клеточных комплексов является тензорным произведением комплексов $C(K_1; Z)$ и $C(K_2; Z)$:

$$C(K_1 \times K_2; Z) = C(K_1; Z) \otimes C(K_2; Z)$$

(см. § 2).

Этот факт верен, очевидно, и в том случае, когда вместо целых чисел в качестве коэффициентов взято произвольное коммутативное кольцо с единицей, в частности, поле. Применяя теорему 2.2, получаем:

Следствие. Для гомологий с коэффициентами в поле k верно равенство

$$H_m(K_1 \times K_2; k) = \sum_{m+l=n} H_m(K_1; k) \otimes H_l(K_2; k).$$

Вообще говоря, для любого кольца G определен гомоморфизм (не изоморфизм), задаваемый тензорным умножением циклов:

$$\sum_{k+l=m} H_k(K_1; G) \otimes H_l(K_2; G) \rightarrow H_m(K_1 \times K_2; G). \quad (1)$$

Здесь циклы $c_1 = \sum_i a_i \sigma_i^k$, $c_2 = \sum_j b_j \sigma_j^l$ переходят в цикл $c_1 \otimes c_2 = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^k \times \sigma_j^l)$. Имеем:

$$\partial(c_1 \otimes c_2) = \partial c_1 \otimes c_2 + (-1)^k c_1 \otimes \partial c_2.$$

Поэтому цепь $c_1 \otimes c_2$ является циклом. Изменив c_1 на $c_1 + \partial c$, мы заменим цикл $c_1 \otimes c_2$ на гомологичный $(c_1 + \partial c) \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 + \partial(c \otimes c_2)$. Построенное отображение (1) корректно. Если $G = k$ — поле, то тензорное умножение задает изоморфизм.

Аналогично определяется тензорное умножение в когомологиях с коэффициентами в кольце:

$$\sum_{k+l=m} H^k(K_1; G) \otimes H^l(K_2; G) \rightarrow H^m(K_1 \times K_2; G)$$

(изоморфизм, если $G = k$ — поле).

Диагональное отображение $\Delta: K \rightarrow K \times K$, где x переходит в (x, x) , индуцирует гомоморфизм когомологий:

$$H^*(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(K; G).$$

Теорема 1. Пусть G — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Тогда сквозное отображение

$$\Delta^*(a \otimes b) = ab: H^k(K; G) \otimes H^l(K; G) \rightarrow H^{k+l}(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^{k+l}(K; G)$$

«Группа циклов» — это формальные суммы «циклов»

$$\sum_i (M_i^k, f_i). \quad (26)$$

Факторизуя по циклам, эквивалентным нулю, — т. е. границам (25), мы получим группы наподобие гомологий, именуемые «бордизмами», и обозначаемые через $\Omega_k(M^n)$. Можно определить бордизмы для любого комплекса $\Omega_k(X)$, естественно вводятся «относительные бордизмы» $\Omega_k(X, Y)$. Для бордизмов верна теорема о гомотопической инвариантности, имеет место точная последовательность пары (X, Y) и даже свойство $\Omega_*(X, Y) = \Omega_*(X/Y)$. Однако для стягиваемых пространств (например, точки $*$) бордизмы оказываются нетривиальными в положительных размерностях. Причина очень проста: далеко не каждое замкнутое многообразие M^k является границей $(k+1)$ -мерного многообразия с краем. Например, если многообразие M^4 является краем пленки W^5 , то класс $p_1(M^4) = 0$. В частности, CP^2 не является краем (детали см. в § 27).

Аналогично определяются «бордизмы по модулю 2» или «неориентируемые бордизмы», где циклы (M^k, f) — это отображения $M^k \xrightarrow{f} X$ всех замкнутых многообразий (не только ориентированных), и пленки также берутся неориентированными. Они обозначаются через $N_k(X)$.

Задача 3. Докажите, что RP^2 не является краем никакого 3-мерного многообразия. Докажите, что все его прямые произведения на себя $RP^2 \times \dots \times RP^2$ также не являются краями.

Задача 4. Докажите, что если многообразие M^k есть край, т. е. $M^k = \partial W^{k+1}$, то эйлерова характеристика $\chi(M^k)$ четна. Имеются естественные гомоморфизмы

$$\Omega_k(X) \rightarrow H_k(X; Z) \rightarrow H_k(X; K), \quad N_k(X) \rightarrow H_k(X; Z_2). \quad (27)$$

Говорят, что классы гомологий из образа этих гомоморфизмов — это «циклы», реализуемые в виде непрерывного образа многообразия, т. е. то самое, что интуитивно мы понимали под циклом раньше. Однако исследование самих бордизмов и задач, где они используются, более сложно (см. § 27).

§ 7. Гомологии прямого произведения. Умножение в когомологиях. Когомологи H -пространств и групп Ли. Когомологи унитарной группы

Пусть K_1 и K_2 — клеточные комплексы. Их прямое произведение $K_1 \times K_2$ снова является клеточным комплексом, его клетки — это произведения клеток комплексов K_1 и K_2 . Поэтому группа целочисленных клеточных цепей $C_n(K_1 \times K_2; Z)$ имеет вид

$$C_n(K_1 \times K_2; Z) = \sum_{k+l=n} C_k(K_1; Z) \otimes C_l(K_2; Z).$$

Граница произведения двух клеток $\sigma^i \times \sigma^j$ находится по формуле

$$\partial(\sigma^i \times \sigma^j) = (\partial\sigma^i) \times \sigma^j \cup (-1)^i \sigma^i \times (\partial\sigma^j)$$

(знак $(-1)^i$ учитывает ориентацию). Отсюда получаем

Утверждение 1. Комплекс целочисленных цепей прямого произведения $K_1 \times K_2$ клеточных комплексов является тензорным произведением комплексов $C(K_1; Z)$ и $C(K_2; Z)$:

$$C(K_1 \times K_2; Z) = C(K_1; Z) \otimes C(K_2; Z)$$

(см. § 2).

Этот факт верен, очевидно, и в том случае, когда вместо целых чисел в качестве коэффициентов взято произвольное коммутативное кольцо с единицей, в частности, поле. Применяя теорему 2.2, получаем:

Следствие. Для гомологий с коэффициентами в поле k верно равенство

$$H_m(K_1 \times K_2; k) = \sum_{m+l=n} H_m(K_1; k) \otimes H_l(K_2; k).$$

Вообще говоря, для любого кольца G определен гомоморфизм (не изоморфизм), задаваемый тензорным умножением циклов:

$$\sum_{k+l=m} H_k(K_1; G) \otimes H_l(K_2; G) \rightarrow H_m(K_1 \times K_2; G). \quad (1)$$

Здесь циклы $c_1 = \sum_i a_i \sigma_i^k$, $c_2 = \sum_j b_j \sigma_j^l$ переходят в цикл $c_1 \otimes c_2 = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^k \times \sigma_j^l)$. Имеем:

$$\partial(c_1 \otimes c_2) = \partial c_1 \otimes c_2 + (-1)^k c_1 \otimes \partial c_2.$$

Поэтому цепь $c_1 \otimes c_2$ является циклом. Изменив c_1 на $c_1 + \partial c$, мы заменим цикл $c_1 \otimes c_2$ на гомологичный $(c_1 + \partial c) \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 + \partial(c \otimes c_2)$. Построенное отображение (1) корректно. Если $G = k$ — поле, то тензорное умножение задает изоморфизм.

Аналогично определяется тензорное умножение в когомологиях с коэффициентами в кольце:

$$\sum_{k+l=m} H^k(K_1; G) \otimes H^l(K_2; G) \rightarrow H^m(K_1 \times K_2; G)$$

(изоморфизм, если $G = k$ — поле).

Диагональное отображение $\Delta: K \rightarrow K \times K$, где x переходит в (x, x) , индуцирует гомоморфизм когомологий:

$$H^*(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(K; G).$$

Теорема 1. Пусть G — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Тогда сквозное отображение

$$\Delta^*(a \otimes b) = ab: H^k(K; G) \otimes H^l(K; G) \rightarrow H^{k+l}(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^{k+l}(K; G)$$

задает в прямой сумме групп когомологий $H^*(K; G) = \sum_{i \geq 0} H^i(K; G)$ структуру ассоциативного косокоммутативного кольца с единицей, $1 \in H^0(K; G)$, $ba = (-1)^{kl} ab$.

Доказательство. Ассоциативность и косокоммутативность следует из следующих очевидных свойств тензорного произведения:

а) Ассоциативность. Если $c_1 \in H^k(K_1; G)$, $c_2 \in H^l(K_2; G)$, $c_3 \in H^m(K_3; G)$, то элементы $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3$, $c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ в группе $H^{k+l+m}(K_1 \times K_2 \times K_3; G)$ совпадают.

б) Косокоммутативность. Если $c \in H^k(K)$, $c' \in H^l(K)$ и $f: K \times K \rightarrow K \times K$ — отображение $f(x, y) = (y, x)$, переставляющее сомножители, то $f^*(c \otimes c') = (-1)^{kl} c' \otimes c$. Нужно использовать тот факт, что при перестановке клеток $\sigma^k \times \sigma^l \rightarrow \sigma^l \times \sigma^k$ ориентация произведения меняется на множитель $(-1)^{kl}$.

Единицей в кольце $H^*(K; G)$ будет элемент $1 \in G = H^0(*; G)$. Действительно, проекция диагонали Δ на сомножитель

$$K \xrightarrow{\Delta} K \times K \xrightarrow{p} K, \quad p(x, y) = x$$

является тождественным отображением. Поэтому $\Delta^*(a \otimes 1) = a$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для дифференциальных форм на многообразиях M_1 и M_2 все аналогично: если заданы две формы $\bar{\omega} = \sum f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $\bar{\omega} = \sum g_{j_1 \dots j_l} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}$, то определено их тензорное произведение $\bar{\omega} \otimes \bar{\omega}$ как форма на $M_1 \times M_2$, $\bar{\omega} = \bar{\omega} \otimes \bar{\omega} = p_1^*(\bar{\omega}) \wedge p_2^*(\bar{\omega}) = (\sum f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge$

$$\wedge (\sum g_{j_1 \dots j_l} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}),$$

где $p_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$, $p_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ — проекции. Любая гладкая форма на $M_1 \times M_2$ может быть разложена в сходящийся ряд из произведений форм на сомножителях M_1 и M_2 . Тензорное произведение двух замкнутых форм замкнуто в $M_1 \times M_2$; тензорное произведение замкнутой формы на точную, есть точная форма. Определение внешнего умножения форм можно понимать так: если $M_1 = M_2$, то имеем диагональ $\Delta = \{(x, x)\} = M_1 \subset M_1 \times M_1$ и ограничение на диагональ $\Delta^*(\bar{\omega} \otimes \bar{\omega}) = \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}$ (в M_1), $\bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = (-1)^{kl} \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}$.

Замечание 2. Для конечных симплициальных комплексов K умножение симплициальных коцепей можно определить так: упорядочим все вершины комплекса $K: \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Любой симплекс $\sigma^k \subset K$ записывается тем самым в виде упорядоченного набора вершин

$$\sigma^k = (\alpha_{j_0} \dots \alpha_{j_k}), \quad \text{где } j_0 < j_1 < \dots < j_k.$$

Пусть α — коцепь размерности k и β — коцепь размерности l (т. е. числовые функции от симплексов размерностей k и l соответственно). Определяется коцепь размерности $k+l$ следующим образом:

$$(\alpha \cup \beta, \sigma^{k+l}) = (\alpha, \sigma_1^k) (\beta, \sigma_2^l), \quad (2)$$

где $\sigma^{k+l} = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{k+l}})$,

$$\sigma_1^k = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_k}), \quad \sigma_2^l = (\alpha_{j_k} \alpha_{j_{k+1}} \dots \alpha_{j_{k+l}}).$$

Единицей этого умножения коцепей $\alpha \cup \beta$ является коцепь, имеющая значение $1 \in G$ на каждой вершине (G — коммутативное кольцо с единицей). Очевидно, это коцикл. Умножение коцепей не является косокоммутативным.

Задача 1. Проверьте равенство (формула Лейбница):

$$\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cup (\delta\beta).$$

Задача 2. Докажите, что следующая разность двух произведений когомологична нулю, если α и β — коциклы:

$$\alpha \cup \beta - (-1)^{kl} \beta \cup \alpha = \delta\gamma, \quad k = \deg \alpha, \quad l = \deg \beta, \quad \delta\alpha = \delta\beta = 0.$$

Поэтому мы получаем косокоммутативное кольцо когомологий (с единицей $1 \in H^0(K; G) = G$) $H^*(K; G) = \sum_{q \geq 0} H^q(K; G)$.

Задача 3. Докажите, что это умножение в когомологиях совпадает с тем, которое было введено выше.

Умножение целочисленных коцепей позволяет определить важную операцию высечения. Если z_{k+l} — цепь из $C_{k+l}(K; \mathbb{Z})$, α и β — коцепи соответственно из $C^k(K; \mathbb{Z})$ и $C^l(K; \mathbb{Z})$, то мы полагаем, по определению,

$$(\alpha^k \cup \beta^l, z_{k+l}) = (\alpha^k \cap z_{k+l}, \beta^l). \quad (3)$$

Формула (3) для всех β^l при фиксированных α^k и z_{k+l} определяет цепь размерности l :

$$z_l = \alpha^k \cap z_{k+l} \in C_l(K; \mathbb{Z}).$$

Задача 4. Докажите, что операция высечения $\cap$ из цикла z_{k+l} коциклом α^k корректно определена на группах гомологий $H^k(K; \mathbb{Z}) \cap H_{k+l}(K; \mathbb{Z}) \subset H_l(K; \mathbb{Z})$.

Задача 5. Докажите, что при непрерывных отображениях комплексов $K \xrightarrow{f} L$ мы имеем (в гомологиях):

$$f_*(f^*(\alpha) \cap z) = \alpha \cap f_*(z).$$

Задача 6. Докажите, что оператор D (см. § 6) задается высечением $\alpha \mapsto \alpha \cap [M^n]$, где $[M^n] = z$ — сумма всех n -мерных симплексов.

В случае, когда группа коэффициентов G — поле, пространства H^k и H_k сопряжены и операция высечения выражается через умножение в гомологиях. Однако для целочисленных гомологий она оказывается полезной.

Пример. Вычислим кольцо когомологий комплексного проективного пространства CP^n с вещественными коэффициентами. Гомологии CP^n нам уже известны (см. § 1), поэтому мы имеем: $H^{2k+1} = H_{2k+1} = 0$,

$$H^{2k}(CP^n, \mathbb{R}) = H_{2k}(CP^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad k \leq n. \quad (4)$$

В § 1 была указана 2-форма c_1 , порождающая кольцо многочленов от образующей $c_1 \in H^2(CP^n, \mathbb{R})$ с соотношением $c_1^{n+1} = 0$. В силу (4) это подкольцо совпадает со всем кольцом $H^*(CP^n, \mathbb{R})$. Итак, получаем: для CP^n кольцо $H^*(CP^n, \mathbb{R})$ есть «усеченные полиномы» от одной образующей c_1 размерности 2

$$H^*(CP^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1]/c_1^{n+1} = 0, \quad \deg c_1 = 2. \quad (5)$$

Пусть $f: K \rightarrow L$ — непрерывное отображение. Это отображение можно считать клеточным в силу теоремы 4.2. Оно порождает отображение прямых произведений

$$F = f \times f: K \times K \rightarrow L \times L,$$

полагая $F(x, y) = (f(x), f(y))$. Отображение F сохраняет диагональ $F(\Delta) \subset \Delta$ и переводит тензорное произведение классов гомологий (когомологий) в тензорное произведение их образов. Отсюда вытекает важный вывод: так как умножение в когомологиях определено формулой $ab = \Delta^*(a \otimes b)$ в обоих комплексах K и L , то непрерывное отображение f коммутирует с операцией умножения классов когомологий, т. е.

$$f^*(ab) = f^*(a) f^*(b).$$

Тем самым $f^*: H^*(L) \rightarrow H^*(K)$ — гомоморфизм колец когомологий.

Применим этот результат к изучению колец когомологий групп Ли (и, более общо, H -пространств). Напомним (см. [1], ч. II, § 22), что общее H -пространство X обладает непрерывным умножением $x \circ y = \psi(x, y) \in X$ (или $\psi: X \times X \rightarrow X$) с «гомотопической единицей» — т. е. выделенным элементом $x_0 \in X$ таким, что отображения произведения на x_0

$$\psi(x_0, x): X \rightarrow X,$$

$$\psi(x, x_0): X \rightarrow X$$

оба гомотопны тождественному. Введем полезные алгебраические определения.

Определение 1. Пусть $H = \sum_{k \geq 0} H^k$ — градуированная косокоммутативная алгебра с единицей: $H^k H^l \subset H^{k+l}$, $yx =$

$= (-1)^{kl} xy$, где $x \in H^k$, $y \in H^l$. H называется «алгеброй Хопфа», если задан сохраняющий размерность гомоморфизм

$$\lambda: H \rightarrow H \otimes H \quad \lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + x_1 \otimes y_1 + \dots + x_k \otimes y_k,$$

где $0 < \deg x_i, \deg y_i < \deg x$. Этот гомоморфизм λ часто называется «диагональю» алгебры H .

Пример 1. Пусть $H = \mathbb{R}[x]$ — алгебра многочленов с вещественными коэффициентами от образующей x . Будем считать, что размерность элемента x четна и положительна. Получаем градуированную алгебру, которая, очевидно, удовлетворяет условию косокоммутативности. Зададим на H структуру алгебры Хопфа, полагая $\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Тогда, очевидно,

$$\lambda(x^k) = x^k \otimes 1 + 1 \otimes x^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i \otimes x^{k-i}.$$

Пример 2. Пусть $H = \Lambda[y]$ — внешняя алгебра от одного образующей y , где размерность y нечетна и положительна. Это тоже градуированная косокоммутативная алгебра. Структура алгебры Хопфа задается формулой $\lambda(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$.

Пример 3. Свободной косокоммутативной алгеброй называется такая, где в подходящем базисе нет никаких нетривиальных соотношений; такими являются примеры 1 и 2 алгебры полиномов и внешней алгебры. Общая свободная косокоммутативная градуированная алгебра $H = \sum_{k \geq 0} H_k$, где все H_k — конечномерные линейные пространства и H_0 — это поле коэффициентов ($H_0 = \mathbb{R}$), имеет вид

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_k, \dots] \otimes \Lambda[y_1, \dots, y_k, \dots],$$

где размерности $\deg x_i$ образующих x_i четны, а размерности $\deg y_i$ все нечетны. Попросту говоря, мы имеем образующие (x_j, y_q) и никаких нетривиальных соотношений, кроме косокоммутативности, откуда следует

$$y_q^2 = -y_q^2 = 0,$$

$$y_i y_j = -y_j y_i, \quad y_i x_j = x_j y_i, \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Требуется, чтобы число образующих данной размерности было конечно. В такой алгебре H можно определить структуру алгебры Хопфа бесчисленным количеством способов *): полагаем для образующих

$$\lambda(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \sum_j \bar{u}_j^{(i)} \otimes \bar{v}_j^{(i)},$$

$$\lambda(y_q) = y_q \otimes 1 + 1 \otimes y_q + \sum_i \bar{u}_q^{(i)} \otimes \bar{v}_q^{(i)},$$

*) Напомним, что мы не требуем «ассоциативности» диагонального отображения λ .

где $\deg \bar{u}_j^{(i)}, \deg \bar{v}_j^{(i)}, \deg \bar{u}_q^{(i)}, \deg \bar{v}_q^{(i)} > 0$ и $\deg \bar{u}_j^{(i)} + \deg \bar{v}_j^{(i)} = \deg x_j, \deg \bar{u}_q^{(i)} + \deg \bar{v}_q^{(i)} = \deg y_q$ (в остальных элементах $\bar{u}_j^{(i)}, \bar{v}_j^{(i)}, \bar{u}_q^{(i)}, \bar{v}_q^{(i)}$ произвольны). Так как алгебра H свободная, то из условия мультипликативности и аддитивности гомоморфизма λ следует, что элементы $\lambda(x), \lambda(y)$ определяют гомоморфизм $H \rightarrow H \otimes H$.

Теорема 2 (Хопф). Алгебра когомологий H -пространства K является алгеброй Хопфа, т. е. имеется гомоморфизм

$$\lambda: H^*(K, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(K, \mathbb{R}) \otimes H^*(K, \mathbb{R}),$$

где

$$\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x^{(i)} \otimes y^{(i)},$$

$$\deg x^{(i)}, \deg y^{(i)} > 0$$

для любого элемента $x \in H^q(K, \mathbb{R}), q > 0$. (Мы считаем, что H -пространство является клеточным комплексом.)

Доказательство. Так как $H^*(K \times K; \mathbb{R}) \approx H^*(K; \mathbb{R}) \otimes H^*(K; \mathbb{R})$, то умножение $\psi: K \times K \rightarrow K$ определяет гомоморфизм

$$\psi^*: H^*(K; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(K; \mathbb{R}) \otimes H^*(K; \mathbb{R}).$$

Положим $\lambda = \psi^*$ и проверим его свойства. Имеем: $\psi^*x = x^{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes y^{(0)} + \sum x^{(i)} \otimes y^{(i)}$, где $\deg x^{(i)}, \deg y^{(i)} > 0$. Рассмотрим вложение $1 \times i: K \times x_0 \subset K \times K$. Так как $\psi(x, x_0)$ гомотопно тождественному отображению, то $(1 \times i)^* \psi^*x = x = x^{(0)} \otimes 1$. Следовательно, $x^{(0)} = x$; аналогично, $y^{(0)} = x$. Теорема доказана.

Применение доказанной теоремы основано на следующем алгебраическом утверждении, описывающем структуру алгебры Хопфа над вещественными числами.

Теорема 3. Любая алгебра Хопфа над полем характеристики нуль — т. е. рациональных комплексных вещественных чисел является свободной косокоммутативной алгеброй (см. пример 3 выше).

Следствие. Алгебра когомологий любой (конечномерной) группы Ли является внешней алгеброй $\Lambda[y_1, \dots, y_n]$.

Доказательство следствия. Рассмотрим свободные образующие (x_j, y_q) . Если имеется хотя бы один четномерный, то в алгебре имеются элементы сколь угодно большой размерности. Этого не может быть в когомологиях конечномерного комплекса (многообразия). Следствие доказано.

Пример 1. Окружность S^1 есть группа Ли. Имеем:

$$H^*(S^1, \mathbb{R}) = \Lambda[y_1], \quad \deg y_1 = 1.$$

Пример 2. Вычислим когомологии унитарной группы $U(n)$. Покажем, что имеет место равенство

$$H^*(U(n), \mathbb{R}) = \Lambda[y_1, y_3, \dots, y_{2n-1}], \quad \deg y_i = i.$$

Доказательство. Унитарная группа эквивалентна (как многообразию) прямому произведению $U(n) = S^1 \times SU(n)$ (см. [1], ч. II, § 22), поэтому достаточно доказать, что

$$H^*(SU(n), \mathbb{R}) = \Lambda[y_3, \dots, y_{2n-1}]. \quad (6)$$

При $n = 2$ группа $SU(2)$ как многообразие совпадает со сферой S^3 , поэтому в этом случае равенство (6) очевидно.

Имеем стандартное расслоение $SU(n) \xrightarrow{SU(n-1)} S^{2n-1}$, где сфера S^{2n-1} есть однородное пространство группы $SU(n)$ и слой $SU(n-1)$ есть группа изотропии.

Построим клеточное разбиение пространства $SU(n)$, исходя из клеточного разбиения сферы S^{2n-1} и слоя $SU(n-1)$. Разберем сначала случай $n = 3$. Имеем расслоение $SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5$. Фиксируем вершину σ^0 на сфере S^5 . На полном прообразе этой точки — слое $SU(2) = S^3$ возьмем стандартные клетки $S^3 = \sigma^0 \cup \sigma^3$. Над дополнением этой точки $S^5 \setminus \sigma^0$ расслоение тривиально (см. [1], ч. II, § 24), т. е. на нем можно ввести координаты прямого произведения: $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = (S^5 \setminus \sigma^0) \times SU(2)$. Но $S^5 \setminus \sigma^0$ есть пятимерный диск D^5 , поэтому $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = D^5 \times S^3$. Это произведение разбивается на клетки следующим образом: $D^5 \times S^3 = \sigma^5 \cup \sigma^8$, где $\sigma^8 = D^5 \times D^3$. Итак, клеточное разбиение группы $SU(3)$ состоит из четырех клеток: $SU(3) = \sigma^0 \cup \sigma^3 \cup \sigma^5 \cup \sigma^8$. Поэтому в когомологиях этого пространства имеем: $H^*(SU(3), \mathbb{R}) = H^3 = H^5 = H^8 = \mathbb{R}$, остальные — нули.

Согласно теореме Хопфа, можно выбрать образующие $y_3 \in H^3(SU(3), \mathbb{R}), y_5 \in H^5(SU(3), \mathbb{R})$ такие, что $y_3^2 = y_5 = 0$ и $y_3 y_5 = -y_5 y_3 \neq 0$ есть образующие в группе $H^8(SU(3), \mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть для когомологий $H^*(SU(n-1), \mathbb{R})$ равенство (6) уже доказано. Клеточное разбиение группы $SU(n)$ порождено расслоением $SU(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ со слоем $F = SU(n-1)$, разбитым на клетки σ_F^i с одной вершиной σ_F^0 в слое. Клетки в базе — это σ^j и σ^{2n-1} . Так как $p^{-1}(\sigma^0) = F$ и $p^{-1}(\sigma^{2n-1}) = \sigma^{2n-1} \times F$, мы имеем клетки в $SU(n)$

$$\sigma_F^i \times \sigma^0, \quad \sigma_F^i \times \sigma^{2n-1}. \quad (7)$$

По индукции имеем: число клеток в $SU(n-1)$ равно числу линейно независимых коциклов, а также:

$$H^*(SU(n-1), \mathbb{R}) = \Lambda[y_3, \dots, y_{2n-3}].$$

Покажем, что клетки $\sigma_F^i \times \sigma^0$ и $\sigma_F^i \times \sigma^{2n-1}$ — все коциклы. Для $(\sigma_F^i \times \sigma^0)$, представляющих элементы y_i в слое, это очевидно, так

как новая клетка появляется в размерности $2n - 1$. Остальные клетки в слое представляют их произведения (по индукции).

Пусть $y_{2n-1} = (\sigma_F^0 \times \sigma^{2n-1})$ — кощеп, сосредоточенная на одной этой новой клетке. Если $\delta y_{2n-1} \neq 0$ в $C^*(SU(n))$, то в алгебре $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ мы получили бы нетривиальное соотношение на внешние образующие $y_3, \dots, y_{2n-3}$. Это противоречит теореме Хопфа. Далее, в силу теоремы Хопфа, алгебра $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ содержит внешнюю алгебру $\Lambda[y_3, \dots, y_{2n-3}]$. Ранг этой алгебры в каждой размерности совпадает с числом клеток (7). Тем самым $H^*(SU(n), \mathbb{R}) = \Lambda[y_1, \dots, y_{2n-1}]$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x_1, x_2, \dots$ — однородные элементы алгебры H , $x \in H^{\deg x_i}$, где $0 < \deg x_i \leq \deg x_j$, $i < j$; $\{x_j\}$ — минимальная система образующих алгебры Хопфа H . Это означает, что любой элемент алгебры H представляется в виде многочлена $P(x_1, x_2, \dots)$ от образующих (возможно, не однозначно), причем никакой из элементов x_k нельзя представить в виде многочлена от меньших x_j ; $x_k \neq P(x_1, \dots, x_{k-1})$. Для образующего x_i рассмотрим его степени x_i^s .

Пусть s_i — минимальное число такое, что $x_i^{s_i} = 0$. Например, для любого нечетномерного элемента x_i мы имеем: $s_i = 2$. Если любая степень образующего x_i отлична от нуля, то мы будем считать, что $s_i = \infty$.

Докажем сначала, что в алгебре Хопфа не может быть других соотношений, кроме соотношений вида $x_i^{s_i} = 0$ и соотношений, вытекающих из косокоммутативности.

Лемма. Одночлены вида $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$, где $0 \leq r_i < s_i$, линейно независимы и образуют базис векторного пространства H .

Доказательство. Любой одночлен можно привести к виду, указанному в лемме, в силу косокоммутативности. Такие одночлены будем называть нормальными. Степень (размерность) нормального одночлена определяется выражением $n = r_k \deg x_k + \dots + r_1 \deg x_1$.

Линейную комбинацию нормальных одночленов будем называть нормальным многочленом. Нужно доказать, что нетривиальный нормальный многочлен не равен нулю. Доказательство будем вести индукцией по степени многочленов. Допустим, для степеней $< n$ утверждение о независимости нормальных одночленов в H уже доказано. Отсюда следует, в частности, что тензорные произведения вида $a \otimes b$ в алгебре $H \otimes H$, где a и b — нормальные одночлены степени меньшей, чем n , также линейно независимы.

Пусть $P(x_k, \dots, x_1)$ — нормальный многочлен степени n . Соберем вместе члены с наибольшей степенью переменного x_k и вынесем эту степень за скобку. Получим:

$$P(x_k, \dots, x_1) = x_k^r Q(x_{k-1}, \dots, x_1) + R(x_k, \dots, x_1), \quad (8)$$

где в многочлен R переменная x_k входит уже в меньшей степени.

Допустим, мы имеем соотношение вида $P(x_k, \dots, x_1) = 0$, где r — минимально возможное. Докажем, что $r = 1$, $Q = \text{const}$. Пусть I_{k-1} — идеал в алгебре H , порожденный элементами $x_1, \dots, x_{k-1}$. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} \lambda(x_k^r Q(x_{k-1}, \dots, x_1)) &\equiv \\ &\equiv x_k^r \otimes Q + \sum_{i=0}^{r-1} (C_i^r x_k^i \otimes x_k^{r-i}) (1 \otimes Q) \pmod{I_{k-1} \otimes H}, \end{aligned}$$

причем $\lambda(R(x_k, \dots, x_1))$ не содержит членов вида $x_k^i a \otimes x_k^j b$, где $i + j = r$. Если $\deg Q > 0$, то $\deg x_k^i$ и $\deg Q$ меньше n , поэтому выражения, входящие в $\lambda(P(x_k, \dots, x_1))$, линейно независимы по предположению индукции. Значит, $\deg Q = 0$; можно считать, что $Q = 1$, $r \deg x_k = n$. Если $r > 1$, то в выражение

$$\lambda(x_k^r) = \sum_{i=0}^r C_i^r x_k^i \otimes x_k^{r-i} \pmod{I_{k-1} \otimes H}$$

входят линейно независимые члены, которые ни с чем не могут сократиться в $\lambda(R(x_k, \dots, x_1))$. Значит, $r = 1$, и соотношение (8) имеет вид $x_k = -R(x_{k-1}, \dots, x_1)$, что невозможно ввиду минимальности системы образующих. Лемма доказана.

Покажем теперь, что если степень $\deg x_k$ четна, то $x_k^s \neq 0$ при любом s . Действительно, если уже доказано, что $x_k^{s-1} \neq 0$, то в выражение $\lambda(x_k^s)$ входят члены вида $C_i^s x_k^i \otimes x_k^{s-i}$, отличные от нуля при $0 < i < s$. Эти члены независимы и не могут уничтожиться с остальными слагаемыми в $\lambda(x_k^s)$ (проверьте).

Итак, мы доказали, что для минимальной системы образующих в алгебре Хопфа H нет других соотношений, кроме антикоммутативности. Четномерные образующие порождают в H подалгебру многочленов $R[x_1, x_2, \dots]$; нечетномерные — внешнюю подалгебру $\Lambda[x_1, x_2, \dots]$. Вся алгебра H является, очевидно, их тензорным произведением. Теорема доказана.

Укажем другие примеры H -пространств.

Пример 1. Если K — комплекс, то можно определить пространство путей $\Omega(K, x_0) = X$, начинающихся и кончающихся в точке x_0 (см. [1], гл. II, § 22). Здесь имеется умножение путей, гомотопическая единица x_0 . Более того, это умножение «гомотопически ассоциативно» и обладает «гомотопически обратным элементом» $x \rightarrow \bar{x}$;

а) отображения $(x \circ y) \circ z: X \times X \times X \rightarrow X$ и $x \circ (y \circ z): X \times X \times X \rightarrow X$ гомотопны; б) отображение $x \rightarrow x \circ \bar{x}: X \rightarrow X$ гомотопно постоянному $X \rightarrow x_0$.

Пример 2. Кроме групп Ли, закон умножения с единицей можно ввести на 7-мерной сфере S^7 , исходя из так называе-

мых чисел Кэли: пространство $\mathbb{R}^8$ является алгеброй с делением (но неассоциативной). Билинейное умножение задается так: если (q_1, q_2) — пара кватернионов, (q'_1, q'_2) — другая пара, то мы полагаем

$$(q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2) = (q_1 q'_1 - \bar{q}_2 q'_2, q'_2 q_1 + q_2 \bar{q}'_1),$$

$$(q_1, q_2)^{-1} = \frac{(\bar{q}_1, -q_2)}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Кроме групп Ли G и произведений $G \times S^7 \times \dots \times S^7$ не известно других примеров односвязных конечномерных H -пространств. Например: если имеется умножение на сфере S^{n-1} с единицей $x \in S^{n-1}$, то мы имеем отображение умножения:

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\psi} S^{n-1}, \quad (x, y) \rightarrow x \circ y.$$

Далее,

$$S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n)$$

(склейка по общей границе $S^{n-1} \times S^{n-1}$). Отображение ψ можно продолжить до отображения

$$f(\psi): S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n) \rightarrow S^n,$$

где S^{n-1} — это экватор в S^n (проделайте это).

Рассмотрим комплекс

$$K_n = S^n \cup_{f(\psi)} D^{2n}$$

с клетками $\sigma^0, \sigma^n, \sigma^{2n}$. Поэтому

$$H^j(K_n) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, n, 2n, \\ \mathbb{Z}, & j = 0, n, 2n. \end{cases}$$

Пусть $u_n \in H^n(K_n, \mathbb{Z}_2)$, $u_{2n} \in H^{2n}(K_{2n})$ — базисные классы когомологий (mod 2).

Задача 7. Покажите, что $u_n^2 = u_{2n}$, если умножение обладало единицей, т. е. $\psi: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ имело степень $+1$ на каждом сомножителе.

Мы знаем примеры умножения на сферах S^{n-1} для $n = 1, 2, 4, 8$ (вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные $\mathbb{C}$, кватернионы $\mathbb{H}$ и числа Кэли $\mathbb{K}$). Имеется трудная теорема (Адамс) о том, что для других $n \neq 1, 2, 4, 8$ таких комплексов K_n не существует ($K_1 = \mathbb{R}P^2$, $K_2 = \mathbb{C}P^2$, $K_4 = \mathbb{H}P^2$, $K_8 = \mathbb{K}P^2$).

Дадим еще одно применение когомологического умножения. Покажем, что группа $\pi_{2n-1}(S^n)$ бесконечна для четных n .

Рассмотрим $S^n \times S^n$, где n четное. В кольце $H^*(S^n \times S^n)$ выберем базис $1, 1 \otimes u, u \otimes 1, u \otimes u$, где $u \in H^n(S^n)$ — базисный элемент. Рассмотрим отображение букета φ :

$$S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n, \quad S^n \vee S^n = (S^n \times x_0) \cup (x_0 \times S^n),$$

$$\varphi: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$$

степени λ на первом слагаемом и степени μ на втором.

Мы имеем $\varphi^*(u) = \lambda(u \otimes 1) + (1 \otimes u)\mu$.

Так как $u^2 \neq 0$, мы получаем, что при $\mu, \lambda \neq 0$ отображение φ не продолжается до отображения $\hat{\varphi}: S^1 \times S^n \rightarrow S^n$, поскольку из условия $u^2 = 0$ следовало бы $\hat{\varphi}^*(u)^2 = 0$. Однако $\hat{\varphi}^*(u^2) = 2\lambda\mu u \otimes u \neq 0$. Клеточное разбиение $S^n \times S^1$ таково:

$$S^n \times S^1 = (\sigma^0 \cup \sigma^n \cup \sigma^n \cup \sigma^{2n}) = (S^n \vee S^n) \cup D^{2n}.$$

Отображение $S^{2n-1} = \partial D^{2n} \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{\varphi} S^n$ не гомотопно нулю при любых $\mu, \lambda \neq 0$, поскольку иначе отображение продолжалось бы на диск D^{2n} и тем самым на все $S^1 \times S^n$.

Задача 8. Докажите, что число $\lambda\mu$ является аддитивным инвариантом гомотопического класса построенного отображения $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ для любых четных n .

Задача 9. Постройте отображение $\psi: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ для любых четных n с $\lambda = 2, \mu = -1$.

Задача 10. Пусть $S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$ правильно в точках $x_0, x_1 \in S^n$ (см. [1], ч. II, § 10) и $M_1^{n-1} = f^{-1}(x_0)$, $M_2^{n-1} = f^{-1}(x_1)$ — замкнутые подмногообразия. Пусть $\{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}$ — их коэффициент зацепления (см. [1], ч. II, § 15)*). Положим

$$\gamma = \{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}.$$

Докажите, что для построенных выше отображений $f = f(\varphi)$ имеет место равенство $\gamma = 2\lambda\mu$.

Докажите, что для комплекса $K = S^n \cup D^{2n}$, где склейка произведена по отображению $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$, мы имеем $u_n^2 = \gamma u_{2n}$ в кольце $H^*(K, \mathbb{Z})$.

Задача 11. Докажите, что для любого гладкого расслоения

$$S^{2n-1} \xrightarrow{p} S^n$$

коэффициент $\gamma = \pm 1$.

§ 8. ГОМОЛОГИИ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ (расслоенных пространств)

Связь гомологий слоя, базы и пространства для расслоения несравнимо более сложная, чем для прямого произведения. Мы будем считать коэффициенты полем, не оговаривая этого дальше.

Пусть имеется расслоение $E \xrightarrow{p} B$ со слоем F , где все E, B, F являются клеточными комплексами или им гомотопически эквивалентны. Клеточное разбиение пространства E уже указывалось выше (§ 7):

*) Коэффициент зацепления в [1] был определен лишь для замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$. Однако совершенно аналогично определяется коэффициент зацепления для подмногообразий M_1^k, M_2^k в $\mathbb{R}^{2k+1}$ (или в S^{2k+1}) как индекс пересечения одного из них с пленкой, натянутой на другое.

если σ_F^i — клетки слоя F и σ_B^q — клетки базы, то прообраз $\rho^{-1}(\sigma_B^q)$ есть прямое произведение $\sigma_B^q \times F$, и мы имеем клетки в E

$$\sigma_E^{q+i} = \sigma_B^q \times \sigma_F^i.$$

Таким образом, клеточное разбиение формально такое же, как и в прямом произведении. Однако граничный оператор устроен гораздо более сложно. Мы уже приводили пример (см. § 4) пространства линейных элементов к поверхности рода g , на котором видны эти осложнения. Перечислим простые свойства граничного оператора в E .

1) Если σ_B^0 — вершина в базе, то для клеток $\sigma_E^i = \sigma_B^0 \times \sigma_F^i$ мы имеем очевидное равенство:

$$\partial \sigma_E^i = \sigma_B^0 \times (\partial \sigma_F^i).$$

2) Если $\sigma_E^{q+i} = \sigma_B^q \times \sigma_F^i$, то граница имеет вид

$$\partial \sigma_E^{q+i} = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^i) + \Delta, \quad (1)$$

где Δ — клетки из полного прообраза $\rho^{-1}(\overline{\partial \sigma_B^q})$, причем под $\overline{\partial \sigma_B^q}$ понимается топологическое замыкание образа сферы S^{q-1} — границы $\partial \sigma_B^q$ в базе B . Во всяком случае, $\Delta \subset \rho^{-1}(B^{q-1})$, где B^{q-1} — осто́в базы размерности $q-1$.

Задача 1. Пусть база B — односвязна, имеет одну вершину σ_B^0 и не имеет клеток размерности 1. Тогда верна формула

$$\partial \sigma_E^{q+i} = \sigma_B^0 \times (\partial \sigma_F^i) + (-1)^i (\partial \sigma_B^q) \times \sigma_F^i + \Delta_1, \quad (2)$$

где $\Delta_1 \subset \rho^{-1}(B^{q-2})$.

Мы будем предполагать далее, что рассматриваются расслоения $E \xrightarrow{F} B$, где формула (2) верна. Например, эта формула очевидно верна в том случае, когда в базе нет клеток размерности $q-1$. Это верно для $B = S^n$ ($n > 1$), $B = CP^n$, $B = HP^n$, а также, если B есть комплексное грассманоно многообразие, букет сфер, прямое произведение сфер и ряд других.

Замечание. Фактически, рассуждения, которые мы проведем, и выводы, которые мы получим, будут верны (после некоторых усложнений) в более общем случае: группа $\pi_1(B)$ должна тривиально действовать на группах $H_*(F)$. Для расслоений линейных элементов это означает, например, что база — ориентируемое многообразие (слой сфера). Если слой сфера, то такое условие будет всегда выполнено для $H_*(F, \mathbb{Z}_2)$, независимо от ориентируемости базы и расслоения, так как $H_*(S^n, \mathbb{Z}_2)$ вообще не имеет нетривиальных автоморфизмов. Поправки, возникающие в том случае, когда $\pi_1(B)$ нетривиально действует на $H_*(F)$, будут указаны в § 11 (ниже).

Итак, мы изучаем класс расслоений, для которых верна формула (2).

Разложим границу в ряд по остовам базы:

$$\partial \sigma_E^{q+i} = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^i) + (-1)^i (\partial \sigma_B^q) \times \sigma_F^i + \partial_2 + \partial_3 + \dots,$$

где $\partial_k = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_B^{q-k, \alpha} \times \sigma_F^{i+k-1, \alpha}$, λ_{α} — числа, состоит из произведений $(q-k)$ -мерных клеток базы на $(j+k-1)$ -мерные клетки слоя. По определению, имеем:

$$\partial \sigma_E^{q+i} = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \dots,$$

$$\partial_0 = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^i), \quad \partial_1 = \pm (\partial \sigma_B^q) \times \sigma_F^i.$$

Для комплекса цепей мы имеем

$$C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes C_j(F).$$

Оператор границы имеет вид

$$\partial_E(a \otimes b) = a \otimes \partial_F b \pm (\partial_B a) \otimes b + \partial_2(a \otimes b) + \dots, \quad (3)$$

где

$$\partial_k(a \otimes b) \in C_{q-k}(B) \otimes C_{j+k-1}(F)$$

для $a \in C_q(B)$, $b \in C_j(F)$.

Обратим внимание на то, что операторы ∂_0 и ∂_1 здесь такие же, как и в прямом произведении $E_0 = B \times F$. Операторы ∂_k при $k > 2$ в прямом произведении равны нулю. Они характеризуют степени «перекашивания» граничного оператора в комплексе $C(E)$ по сравнению с прямым произведением $E_0 = B \times F$.

Для исследования гомологий $H_*(E)$ используется «метод просеивания» или «метод последовательных приближений» последовательно по $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (называемый спектральной последовательностью Лере). Суть этого метода состоит в следующей процедуре:

Шаг 0. Так как $\partial_0^2 = 0$, то мы можем вычислить «гомологии нулевого приближения» относительно только этого «оператора границы в нулевом приближении» ∂_0 . Мы получаем:

$$H_n(C(E), \partial_0) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes H_j(F) = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(1)}.$$

Таким образом, $H_n(C, d_0)$ — это цепи в базе B со значением в гомологиях слоя F : $E_{p,j}^{(1)} = C_q(B, H_j(F))$.

Шаг 1. На d_0 -циклах по модулю границ $\text{Im } \partial_0$ (т. е. на группах $H_*(C, d_0)$) корректно определен оператор d_1 , который обладает свойством $d_1^2 = 0$. Имеем комплекс

$$E^{(1)} = \sum E_{q,j}^{(1)}, \quad d_1: E_{q,j}^{(1)} \rightarrow E_{q-1,j}^{(1)}.$$

При наших гипотезах гомологии в первом приближении — т. е. для комплекса $(E^{(1)}, d_1)$ — совпадают с гомологиями прямого произведения (см. вид d_0 и d_1):

$$H_n(E^{(1)}, d_1) = \sum_{q+j=n} H_q(B, H_j(F)) = \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_*(B \otimes F).$$

Оператор d_1 — это граничный оператор на цепях в базе B с коэффициентами в $H_*(F)$.

Имеется очевидное прямое разложение

$$H_n(E^{(1)}, d_1) = \sum_{q+j=n} H_q(B) \otimes H_j(F),$$

где слагаемые представлены d_1 -циклами $z \in E_{q,j}^{(1)} = C_q(B, H_j(F))$ с точностью до d_1 -границ $\text{Im } d_1$. Группы d -гомологий $H_n(E^{(1)}, d_1)$ обозначаются через

$$E_n^{(2)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(2)} = \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_n(B \times F).$$

Для прямого произведения $E_0 = B \times F$ на этом вся процедура кончается. Для косого произведения возникают следующие шаги, использующие $d_2, d_3, \dots$

Шаг 2. Оператор d_2 порождает граничный оператор d_2 на гомологиях «первого приближения» $E^{(2)} = H_*(E^{(1)}, d_1)$ и обладает свойством $d_2^2 = 0$. Возникают гомологии «второго приближения»

$$E_n^{(3)} = H_n(E^{(2)}, d_2) = \sum_{q+j=n} H_{q,j}(E^{(2)}, d_2),$$

$$E^{(3)} = \sum_{n \geq 0} E_n^{(3)}, \quad E_n^{(3)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(3)}.$$

Мы имеем

$$d_2: E_{q,j}^{(2)} \rightarrow E_{q-2,j+1}^{(2)}, \quad E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F).$$

Элементы групп $E_{q,j}^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ представлены элементами (d_2 -циклами) $z \in E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F)$ с точностью до d_2 -границ.

Эта последовательность «просеиваний» продолжается и дальше: возникают комплексы $E^{(r)} = \sum E_{q,j}^{(r)}$ с граничным оператором

$$d_r: E_{q,j}^{(r)} \rightarrow E_{q-r,j+r-1}^{(r)} \quad \text{и} \quad E^{(r+1)} = \sum E_{q,j}^{(r+1)} = H_*(E^{(r)}, d_r).$$

Очевидно, все группы $E_{q,j}^{(r)}$ при $q < 0$ или при $j < 0$ равны нулю для всех $r \geq 0$. Поэтому оператор $d_r \equiv 0$ на группах $E_{q,j}^{(r)}$, если $q < r$.

В этом случае имеем

$$E_{q,j}^{(r)} = E_{q,j}^{(r+1)} \equiv E_{q,j}^{(r+2)} \equiv \dots \equiv E_{q,j}^{(\infty)}, \quad q < r.$$

Эти группы обозначаются через $E_{q,j}^{(\infty)}$.

Теорема (Лере *).

1) Все дифференциалы d_r корректно определены и $d_r^2 \equiv 0$.

2) Прямая сумма $E_n^{(\infty)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ изоморфна группе $H_n(E)$

для поля коэффициентов.

3) Группы $E_{q,j}^{(2)}$ изоморфны группам $H_q(B) \otimes H_j(F)$.

Итак, в результате всех просеиваний мы получили циклы в пространстве E (как ядра всех гомоморфизмов d_r по модулю образов предыдущих) с точностью до границ.

Следствие. В косом произведении ранги групп гомологий, вообще говоря, меньше, чем в прямом (т. е. числа Бетти $b_k(E) < b_k(E_0)$ для всех k , $E_0 = B \times F$). Это следует из того, что уже $E_n^{(2)} = H_n(E_0)$; затем происходит «просеивание» части циклов операторами $d_2, d_3, \dots$, отбирая только их ядра (d_r -циклы), факторизуя по d_r -границам, затем переходя к d_{r+1} и т. д.

Дадим определение операторов d_2 на группах $E_{q,j}^{(2)}$. Так как $d_E = d_0 + d_1 + d_2 + \dots$ и $d_E d_E \equiv 0$, мы получаем равенство

$$0 = d_E^2 = d_0^2 + (d_0 d_1 + d_1 d_0) + (d_1^2 + d_0 d_2 + d_2 d_0) +$$

$$+ (d_1 d_2 + d_2 d_1 + d_0 d_3 + d_3 d_0) + (d_2^2 + d_3 d_1 + d_1 d_3 + d_0 d_4 + d_4 d_0) + \dots \quad (4)$$

Применяя общее равенство (4) к группам $C_{q,j}(E)$ по отдельности, получим цепочку равенств

$$0 = d_0^2: C_{q,j} \rightarrow C_{q,j-2},$$

$$0 = d_0 d_1 + d_1 d_0: C_{q,j} \rightarrow C_{q-1,j-1},$$

$$0 = d_1^2 + d_0 d_2 + d_2 d_0: C_{q,j} \rightarrow C_{q-2,j}, \quad (5)$$

$$0 = d_1 d_2 + d_2 d_1 + d_0 d_3 + d_3 d_0,$$

$$0 = d_2^2 + d_1 d_3 + d_3 d_1 + d_0 d_4 + d_4 d_0.$$

1) Рассмотрим оператор d_1 на d_0 -циклах ($d_0 = d_0$) mod d_0 -границ — т. е. на d_0 -гомологиях $E_{q,j}^{(1)}$.

Если $d_0 x = 0$, то мы имеем

$$d_1(x + d_0 \bar{x}) = d_1 x + d_1 d_0 \bar{x} = d_1 x - d_0(d_1 \bar{x}).$$

*) Из приведенного в этой книге материала эта теорема дает нам первый важный случай, когда доказательство без серьезного использования языка гомологической алгебры невозможно.

Тем самым d_1 корректно определен на d_0 -циклах mod d_0 -границ. Далее из (5) имеем

$$\partial_1^2 x = -\partial_0 \partial_2 x - \partial_2 \partial_0 x = -\partial_0 \partial_2 x,$$

так как $\partial_0 x = 0$. Поэтому получаем

$$\partial_1^2 x \equiv 0 \pmod{\text{Im } d_0}, \quad d_1^2 \equiv 0 \text{ на } E_*^{(1)}.$$

Итак, d_1 определен корректно, и $d_1^2 = 0$ на группах $H_*(E^{(0)}, d_0)$.

2) Построим оператор d_2 на группах $H_*(E^{(1)}, d_1) = E_*^{(2)}$. Рассмотрим в цепях $C_*(E)$ представителя x элемента из $E_*^{(2)}$ такого, что

$$\partial_0 x = 0, \quad \partial_1 x = 0 \pmod{\text{Im } \partial_0}$$

или

$$\partial_1 x = \partial_0 y.$$

Цепь $\partial_2 x$ может не обладать свойством (6). Мы имеем

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_2 x &= -\partial_2 \partial_0 x - \partial_1 \partial_1 x = -\partial_1 \partial_0 y = \partial_0 \partial_1 y, \\ \partial_1 \partial_2 x &= -\partial_2 \partial_1 x - \partial_0 \partial_2 x - \partial_3 \partial_0 x = -\partial_2 \partial_0 y + \text{Im } \partial_0 = \\ &= \partial_0 \partial_2 y + \partial_1^2 y + \text{Im } \partial_0 \end{aligned} \quad (7)$$

($\partial_3 \partial_0 x = 0$). Из соотношений (7) следует, что элемент

$$\partial_2 x - \partial_1 y = d_2 x$$

уже удовлетворяют условиям (6). Итак, мы получаем:

$$d_2 x = \partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x + [\text{Im } \partial_0 + \partial_1 (\text{Ker } \partial_0)].$$

При этом

$$\partial_1 d_2 x = \partial_0 (\partial_2 y - \partial_3 x).$$

Корректность определения $d_2 x$:

пусть $x \rightarrow x + \partial_0 z + \partial_1 v = \bar{x}$ ($\partial_0 v = 0$); тогда

$$\begin{aligned} \partial_2 \bar{x} - \partial_1^{-1} \partial_0 \partial_1^{-1} \bar{x} &= \partial_2 x + \partial_2 \partial_0 z + \partial_2 \partial_1 v = \\ &= (\partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x) - \partial_0 \partial_2 z - \partial_1^2 z - \partial_1 \partial_2 v - \\ &- \partial_0 \partial_3 v - \partial_3 \partial_0 v + \partial_1^2 z + \partial_1 (\partial_0^{-1} \partial_0 \partial_2 v + \partial_0^{-1} \partial_2 \partial_0 v) = \\ &= (\partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x) + \text{Im } \partial_0 + \partial_2 (\text{Ker } \partial_0) \end{aligned}$$

($\partial_3 \partial_0 v = \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_2 \partial_0 v = 0$). Тем самым d_2 корректно определен на $E_*^{(2)}$. Проверим равенство $d_2 d_2 = 0$ на $E_*^{(2)}$. Если $\partial_0 x = 0$, $\partial_1 x = \partial_0 y$, то мы имеем

$$d_2 x = \partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x,$$

$$\begin{aligned} d_2^2 x &= \partial_2 (\partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x) - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 (\partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x) = \\ &= -\partial_0 \partial_4 x - \partial_4 \partial_0 x - \partial_1 \partial_3 x - \partial_3 \partial_0 y - \partial_2 \partial_1 y - \partial_1 (\partial_2 y - \partial_3 x) = \\ &= -\partial_0 (\partial_4 x + \partial_3 y) = \text{Im } \partial_0 \end{aligned}$$

($\partial_4 \partial_0 x = 0$). Тем самым оператор $d_2 = \partial_2 - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1$ определен корректно на группах $E_*^{(2)}$ и обладает свойством $d_2 d_2 = 0$.

3) Оператор d_3 на группах $E_*^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ определяется так же, исходя из оператора ∂_3 на таких цепях $x \in C_{q,j}(E)$, где $\partial_0 x = 0$, $\partial_1 x = \partial_0 y$, $\partial_2 x - \partial_1 y = \partial_0 z + \partial_1 w$ и где $\partial_0 w = 0$ (d_2 -циклы), с точностью до объединения образов d_i , $i \leq 2$, границ всех предыдущих операторов d_i . Не проводя вычислений, мы укажем сразу, что все операторы d_r можно определить корректно, поправляя оператор ∂_r , действующий из $C_{q,j}$ в $C_{q-r,j+r-1}$, на добавки из образов $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{r-1}$, по аналогии с d_2 . При этом мы будем иметь $d_r d_r = 0$ и $d_r: E_*^{(r)} \rightarrow E_{q-r,j+r-1}^{(r)}$ по определению. Точный вид оператора d_r нам не важен.

Объясним идею доказательства теоремы Лере (выше) для того частного случая, когда все ∂_i при $i \geq 3$ тривиальны. Здесь, не привлекая языка гомологической алгебры, можно проверить все до конца прямым вычислением. Корректность оператора d_2 уже проверена. Нужно доказать, что гомологии $H_*(E^{(2)}, d_2) = H_*^{(3)} = E_*^{(\infty)}$ совпадут с гомологиями $H_*(E)$ над полем коэффициентов.

Пусть x — элемент из $H_n(E)$, представленный циклом — цепью $\bar{x} \in C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_{q,j}(E)$. Мы будем называть «фильтрацией» элемента $x \in H_n(E)$ такое минимальное число q , что x может быть реализован циклом $\bar{x}$ из полного прообраза $p^{-1}(B^q)$ q -мерного остова базы и не может быть реализован цепью из $p^{-1}(B^{q-1})$:

$$\bar{x} = x_q + x_{q-1} + \dots + x_0 = x_q + \Delta, \quad \Delta \in p^{-1}(B^{q-1}),$$

где

$$x_q \in C_{q,j}, \quad x_{q-1} \in C_{q-1,j+1}, \dots, x_0 \in C_{0,n}.$$

Так как $\partial_E \bar{x} = 0$, мы имеем ($\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2$) разложение $\partial_E \bar{x}$ по группам $C_{q,j}$:

$$\begin{aligned} \partial_E \bar{x} &= \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q + \partial_0 x_{q-1}) + (\partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} + \partial_0 x_{q-2}) + \\ &+ (\partial_2 x_{q-1} + \partial_1 x_{q-2} + \partial_0 x_{q-3}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Из условия $\partial_E \bar{x} = 0$ имеем

$$\partial_0 x_q = 0, \quad \partial_1 x_q = -\partial_0 x_{q-1}, \quad \partial_2 x_q = -\partial_1 x_{q-1} - \partial_0 x_{q-2}.$$

Отсюда мы имеем вывод, что цепь x_q является циклом дифференциалов d_0, d_1, d_2 , так как

$$d_0 = \partial_0 (x_q) = 0, \quad d_1 = \partial_1 (x_q) = -\partial_0 (x_{q-1}),$$

$$d_2 x_q = \partial_2 x_q - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x_q = \partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} = -\partial_0 x_{q-2}.$$

Итак, циклу x фильтрации q соответствует цепь $x_q \in C_{q,j}(E)$, определяющая цикл всех дифференциалов d_r , $r = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому x_q остается в группах $E_*^{(\infty)}$ (в нашем случае $E^{(\infty)} = E^{(3)}$).

Покажем, что x_q не является границей ни одного из дифференциалов d_r ($r = 0, 1, 2$) и тем самым дает ненулевой элемент в $E_{q,j}^{(\infty)}$. Если $x_q = \partial_0 z = d_0 z$ для $z \in C_{q,j+1}(E)$, то фильтрация элемента $\tilde{x} = x - \partial_0 z$ менее, чем q , так как

$$\tilde{x} = (x_q - \partial_0 z) + (x_{q-1} - \partial_1 z) + \dots,$$

причем $x_{q-1} - \partial_0 z = 0$. Поэтому $x_q \neq \partial_0 z$, так как по условию q минимально, и цикл x нельзя снять с остова B^q . Пусть $x_q = d_1 v$, где $\partial_0 v = 0$ и $v \in C_{q+1,j}$. Опять легко проверяется, что цикл $x - \partial_0 v$ имел бы фильтрацию $< q$. Поэтому $x_q \neq d_1 v$ (Кер d_0). Далее, если $x_q = d_2 w = \partial_2 w - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 w$ для $w \in C_{q+2,j-1}$ (где $\partial_0 w = 0$, $\partial_2 w = \partial_0 w$), то мы снимаем $\tilde{x}$ с q -мерного остова $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x} - \partial_2 w$. Это противоречие показывает, что цикл всех дифференциалов $x_q \in C_{q,j}(E)$ переходит в $E_{q,j}^{(\infty)}$ и не равен нулю в $E_{q,j}^{(\infty)}$, если фильтрация класса гомологий $x \in H_{q,j}(E)$ есть точно q . Имеем вложение:

$$H_n(E) \rightarrow \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}.$$

Обратно, пусть задан цикл всех дифференциалов d_i : $x_q \in C_{q,j}(E)$, не равный нулю в $E_{q,j}^{(\infty)}$. Мы знаем следующее (пусть все $\partial_i = 0$ при $i \geq 3$):

$$\begin{aligned} \partial_0 x_q &= 0, \quad \partial_1 x_q = \partial_0 y, \\ \partial_2 x_q - \partial_1 y &= \partial_0 z + \partial_1 w, \quad \partial_0 w = 0, \\ z &\in C_{q-2,j+2}, \quad y \in C_{q-1,j+1}, \quad w \in C_{q-1,j+1}. \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{x} = x_q + x_{q-1} + x_{q-2} + x_{q-3} + \dots,$$

где $x_{q-1} = -(y + w)$, $x_{q-2} = -z$,

$$\partial_2 \tilde{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q - \partial_0 y - \partial_0 w) + (\partial_2 x_q - \partial_0 z - \partial_1 y - \partial_1 w) + \Delta = \Delta,$$

где $\Delta \in p^{-1}(B^{q-3})$. Меняя представителя x_q , а также y, w, z , мы получим в силу соотношений (4)–(5), при условии $\partial_i \equiv 0$, $i \geq 3$, цикл $\tilde{x}$ фильтрации q .

Итак, каждый элемент из групп $E_n^{(\infty)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ представляет элемент из $H_n(E)$.

Дополнения (без доказательства).

1) Элементы фильтрации $q = 0$ — это всегда циклы всех d_r , $r \geq 1$; группы $E_{0,n}^{(1)}$ изоморфны $H_n(E)$. Группы $E_{0,n}^{(\infty)}$ — это факторгруппы; гомоморфизм $H_n(F) \rightarrow E_{0,n}^{(\infty)} \subset H_n(E)$ совпадает с гомоморфизмом вложения слоя i : $F \rightarrow E$.

2) Элементы фильтрации n ($j = 0$) не могут быть границами; здесь $E_{n,0}^{(2)} = H_n(B)$ и $E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$.

Гомоморфизм проектирования на слагаемое $j = 0$

$$\sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)} = H_n(E) \rightarrow E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$$

совпадает с проекцией на базу:

$$p_*: H_n(E) \rightarrow H_n(B).$$

3) Для когомологий все аналогично: имеется последовательность $(E_r^{q,i}, \delta_r)$, где

$$a) \delta_r: E_r^{q,i} \rightarrow E_r^{q+r,i-r+1}, \quad \delta_r \delta_r = 0,$$

$$E_{r+1}^* = H^*(E_r, \delta_r);$$

$$b) \sum_{q+j=n} E_2^{q,i} = H^n(B \times F) = \sum H^q(B) \otimes H^i(F);$$

$$в) \sum_{q,i} E_\infty^{q,i} = H^*(E) \text{ (как группа);}$$

г) все группы E_r^* и операторы δ_r сопряжены с $(E_r^{(r)}, d_r)$ в гомологиях. Однако здесь имеется важное новое свойство:

д) все $E_r^* = \sum E_r^{q,i}$ являются косокоммутативными кольцами, причем $H^*(B \times F) = E_2^*$ как кольцо; если $\alpha \in E^{q,i}$, $\beta \in E^{q',i'}$, то $\alpha\beta \in E^{q+q',i+i'}$, $\alpha\beta = (-1)^{(q+i')(q+i)} \beta\alpha$; для δ_r имеет место формула Лейбница

$$\delta_r(\alpha\beta) = (\delta_r\alpha)\beta \pm \alpha(\delta_r\beta)$$

(заметим при этом, что кольцо E_∞^* не изоморфно кольцу $H^*(E)$, вообще говоря; исключением является случай, когда E_∞^* есть свободная косокоммутативная алгебра; тогда это верно и для $H^*(E)$).

Мы этих фактов доказывать не будем, хотя и используем (особенно д)) в вычислениях ниже.

Разберем несколько примеров применения теоремы Лерэ. Как будет видно, конструкция операторов d_r , $r \geq 2$, не играет никакой роли в вычислениях — важны только их формальные свойства.

Пример 1. Пусть $E = S^{2n+1} \rightarrow CP^n = B$ со слоем $F = S^1$ — стандартное расслоение (см. [1], ч. II, § 24). Вычислим кольцо $H^*(CP^n)$, используя информацию об $H^*(S^1)$ и $H^*(S^{2n+1})$ и условие $\pi_1(B) = 0$.

В члене $E_2^* = H^*(B) \otimes H^*(F)$ — см. рис. 43 (все ненулевые клетки из $E_2^{q,i}$ имеем при $j = 0, 1$). Здесь $H^*(S^1) = \Lambda[u]$, $u^2 = 0$, $\deg u = 1$ и $H^*(B)$ неизвестна, кроме условия $\pi_1 = 0$. Группы $E_2^{q,i}$ нетривиальны лишь при $j = 0, 1$. Поэтому только $\delta_2 \neq 0$; при $i \geq 3$ все $\delta_i \equiv 0$ по соображениям размерности, так как $\delta_r E_r^{q,i} \subset E_r^{q+r,i-r+1}$. Группа $E_r^{q,0}$ есть циклы всех δ_r , $r \geq 2$. Элемент $\delta_2(u) \in H^2(CP^n) = E_2^{2,0}$ порождает группу $H^2(CP^n)$;

иначе мы бы имели либо $H^1(E) = H^1(S^1) \neq 0$, либо $H^2(E) \neq 0$, что невозможно. Пусть $v = \delta_2(u) \neq 0$. Для uv имеем

$$\delta_2(uv) = v^2, \quad \delta_2(uv^k) = v^{k+1}.$$

Из условия $H^i(E) = 0$ при $i \leq 2n$, заключаем: $H^{2j+1}(CP^n) = 0$, $H^{2j}(CP^n)$ — одномерное пространство, порожденное элементом v^j при $j \leq n$. Здесь мы используем кольцевую структуру дифференциала δ_2 (см. рис. 43).

j	0	1	2	3	4	5	6
1	u	0	u \cdot v	0	u \cdot v^2	0	u \cdot v^3
0	1	0	H^2(CP^n)	H^4(CP^n)	H^6(CP^n)	H^8(CP^n)	H^{10}(CP^n)
	0	1	2	3	4	5	6

Здесь $n=3$

Рис. 43.

Пример 2. Пусть $E \xrightarrow{p} S^n$ — расслоение Серра со слоем $F = \Omega(S^n, x_0)$ (петли на сфере). Здесь E стягиваемо и $H_*(E) = 0$. Для базы $B = S^n$ имеем $H_0(S^n)$ и $H_n(S^n)$ — одномерные пространства; остальные $H_j(S^n) = 0$, $j \neq 0, n$. Гомологии слоя F пока неизвестны.

j	0	1	...	n-1	n	q
2n-2	u_2	0	0	0	u_n \cdot v	
n-1	u_1	0	0	0	u_n \cdot v	
0	H^0(F)	0	0	0	0	v

$E_{q,j}^2 \neq 0$
только при $q=0, n$

$E_{q,j}^2$ известны и нетривиальны при $q=0, n$

Рис. 44.

В члене $E_{q,j}^2 = H_q(B) \otimes H_j(F)$ (см. рис. 44) мы имеем единственный нетривиальный дифференциал

$$\begin{aligned} d_n: v &\rightarrow u_1, \\ d_n: v \otimes u_1 &\rightarrow u_2, \\ &\dots \\ d_n: v \otimes u_{k-1} &\rightarrow u_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Вид дифференциала d_n (см. (8)) немедленно получается из теоремы Лере вместе с условием $H_*(E) = 0$ и видом гомологий базы $B = S^n$. Поэтому гомологии $H_*(F)$ имеют вид:

$H_{k(n-1)}(F)$ — одномерное пространство,

$$H_j(F) = 0, \quad j \neq k(n-1).$$

Задача 2. Применяя когомологическое умножение, докажите: (коэффициенты — поле R , $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$).

а) $H^*(\Omega(S^n))$ — кольцо полиномов от одной образующей u размерности $n-1$, если n нечетно;

б) $H^*(\Omega(S^n)) = \Lambda[u] \otimes R[v]$, $\deg u = n-1$, $\deg v = 2n-2$, n четно.

Задача 3. Докажите, что если из тройки пространств (E, F, B) любые два обладают одним из следующих свойств, то третье также обладает этим свойством (предполагается, что расслоение $E \xrightarrow{p} B$ удовлетворяет условиям теоремы Лере):

а) группы гомологий H_* с коэффициентами в каком-либо поле равны нулю;

б) группы гомологий H_* имеют конечное число образующих в каждой размерности;

в) все целочисленные группы гомологий являются конечными группами (т. е. гомологии с коэффициентами в R , $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$ равны нулю);

г) все целочисленные группы гомологий конечны и не имеют элементов порядка p , где p — простое число (т. е. гомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$ равны нулю).

Задача 4. Исследуйте дифференциалы d_r, δ_r в расслоениях:

а) $RP^{2n+1} \rightarrow CP^n$ (слой S^1) с коэффициентами в полях $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p, p > 2$, R или $\mathbb{Q}$;

б) $SU(n) \rightarrow S^{2n-1}$ (слой $SU(n-1)$);

в) $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ (слой $SO(n-1)$);

г) $S^{4n+3} \rightarrow HP^n$ (слой S^3);

д) $V_{n,k} \rightarrow S^{n-1}$ (слой $V_{n-1,k-1}$);

е) $V_{n,k}^C \rightarrow G_{n,k}^C$ (слой $U(k)$);

ж) $V_{n,k}^R \rightarrow G_{n,k}^R$ (слой $SO(k)$).

Используйте кольцевую структуру в когомологиях для примеров б)–ж).

Задача 5. Докажите следующие факты:

а) Если все гомологии односвязного комплекса K конечны (т. е. $H_q(K, R) = 0$ для $q > 0$), то все гомотопические группы конечны;

б) все группы $\pi_{n+i}(S^n)$ конечны (кроме $i=0$ и $i=n-1$, если n четно).

У к а з а н и е. Рассмотрите расслоение Серра $E \xrightarrow{p} K$ со слоем $\Omega(K, k_0)$, где E стягиваемо. Итерируйте это расслоение. Для изу-

чения групп $\pi_i(K)$ пользуйтесь равенством $\pi_i(K) = \pi_{i-1}(\Omega(K)) = \dots$. Для 1-й нетривиальной гомотопической группы используйте равенство: если $\pi_q(X) = 0$, $q < i$, то $\pi_i(X) = H_i(X, Z)$. Переходите к универсальному накрытию, если встретится группа π_i (см. задачу 7 ниже).

Имеется процедура «превращения отображения в расслоение», сохраняющая гомотопические типы:

а) если $K \subset L$ — вложение, то берется пространство $E(K, L)$ путей, начинающихся в K и кончающихся где угодно в L . Очевидно, $E(K, L) \sim K$ (стягивается к K). Имеем отображение $E(K, L) \xrightarrow{p} L$, ставящее пути в соответствие его конец. Это расслоение Серра (докажите);

б) для общего отображения $K \xrightarrow{f} L$ надо рассмотреть «цилиндр» $C_f = (K \times I(0, 1)) \cup_f L$, где $(x, 1) \cong f(x)$. Очевидно, $C_f \sim L$. Далее, $C_f \supset K \times 0 = K$. Применяя к паре $(C_f, K \times 0)$ конструкцию а), получаем расслоение

$$K \sim E(K, L) \xrightarrow{p} C_f \sim L.$$

Легко видеть, что p гомотопно f . Используя эти конструкции, решите задачи:

Задача 6. Докажите, что если отображение f односвязных комплексов индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_*(K, R) \xrightarrow{\sim} H_*(L, R)$, то отображение f индуцирует изоморфизм групп гомотопий

$$\pi_i(K) \otimes R \approx \pi_i(L) \otimes R.$$

Примените это к случаю, когда $K = S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}$ и $L = SU(n)$. Постройте отображение $K \rightarrow L$, пользуясь умножением в $SU(n)$.

Задача 7. Если X — это H -пространство (например, $X = \Omega(K)$), то для всех $q > 0$ докажите равенство

$$H_q(\hat{X}, R) = H_q(X, R),$$

где $\hat{X}$ — универсальное накрытие. Пусть $D = \pi_1(X)$ и $K(D, 1) = B$ — такое пространство, что $\pi_1(B) = D$ и $\pi_i(B) = 0$, $i > 1$ (см. § 10 ниже). Рассмотрите отображение $X \xrightarrow{f} B$, $\pi_1(X) \approx \pi_1(B) = D$. Превратите его в расслоение. Найдите слой.

Задача 8. Рассмотрите естественное вложение $S^n \vee S^n \rightarrow S^n \times S^n$. Превратите его в расслоение. Найдите гомотопии слоя F . Найдите гомотопические группы $\pi_i(S^n \vee S^n) \otimes R = ?$

Задача 9. Пусть X односвязно и $H^*(X, R)$ — свободная алгебра (коссокоммутативная). Найдите группы $\pi_i(X) \otimes R$.

Задача 10. Пусть $\pi_i(X) = 0$ при $i < n - 1$. Докажите равенство $H_j(X, R) \cong \pi_j(X) \otimes R$ при $j < 2n - 1$.

§ 9. Задача о продолжении отображений, гомотопий и сечений. Препятствующий класс когомологий

А. Поставим следующую задачу: пусть заданы клеточный комплекс K и его подкомплекс $L \subset K$ (например, $L = K^{i-1}$ — остов комплекса K). Пусть задано отображение $L \xrightarrow{f} X$. Для упрощения алгебраической стороны предположим, что X — односвязное пространство (или гомотопически простое — такое, что $\pi_1(X)$ — абелева группа и тривиально действует на всех группах $\pi_i(X)$).

Можно ли продолжить отображение $f: L \rightarrow X$ до отображения $F: K \rightarrow X$?

Пусть σ^i — клетка в K такая, что $\partial\sigma^i \subset L$. На границе $\partial\sigma^i$ мы уже имеем отображение $f: L \rightarrow X$. Это отображение определяет элемент $\alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X)$:

$$S^{i-1} \rightarrow \partial\sigma^i \xrightarrow{f} X.$$

Очевидно, следующее: отображение f можно продолжить на клетку σ^i , если и только если $\alpha(\sigma^i, f) = 0$ в группе $\pi_{i-1}(X)$. В частности, продолжить всегда возможно, если $\pi_{i-1}(X) = 0$. Если $\alpha(\sigma^i, f) \neq 0$, то продолжить отображение f на клетку σ^i нельзя (α есть «препятствие»).

В общем случае, начав продолжать отображение с первой размерности такой, что имеются клетки в K , не лежащие в L , при некотором i натолкнемся на нетривиальное «препятствие»:

$$\sigma^i \rightarrow \alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X).$$

Это — коцепь в (K, L) или в группе коцепей $C^i(K, L, \pi_{i-1}(X))$. Мы обозначим эту коцепь через α_i .

Имеет место

Лемма 1. Коцепь α_i является коциклом.

Доказательство. По определению, имеем: $\delta\alpha_i(\sigma^{i+1}) = \alpha_i(\partial\sigma^{i+1})$. Докажем, что коцепь α_i обращается в нуль на $\partial\sigma^{i+1}$. Напомним, что $\alpha_i(\sigma^i)$ определялось через отображение $\partial\sigma^i \rightarrow X$. Пусть, для простоты, K и L — симплициальные комплексы; тогда $\partial\sigma^{i+1}$ и $\partial\sigma^i$ — сферы, лежащие в K , где σ^q — симплекс размерности q . Возникает следующая универсальная ситуация: для симплекса σ^{i+1} имеется отображение его $(i-1)$ -мерного остова в X ($\pi_1(X) = 0$ или π_1 не действует на группах π_{i-1}). Пусть $\alpha_j \in \pi_{i-1}(X)$ представлен отображением границы грани с номером j : если $\sigma^{i+1} = (0, \dots, i+1)$, то j -я грань есть $(0, 1, \dots, j, \dots, i+1)$ (номер j вычеркнут).

Задача 1. Доказать равенство

$$\sum_{j=0}^{i+1} \alpha_j(-1)^j = 0 \in \pi_{i-1}(X) \quad (1)$$

для любого x .

Фактически, дело в том, что каждая грань размерности $i-1$ дважды входит в сумму (1) и при этом с противоположными знаками (группа $\pi_{i-1}(X)$ абелева). При этом из наших условий следует, что начальная точка в определении $\pi_{i-1}(X)$ не существенна. Поэтому α_f — коцикл.

Лемма 2. Если $\alpha_f = \delta\beta$ для некоторой коцепи $\beta \in C^{i-1}(K, L, \pi_{i-1}(X))$, то отображение f можно так изменить на $(i-1)$ -мерном остове K^{i-1} , не изменяя его на $(i-2)$ -мерном остове K^{i-2} и на всем L , что для нового отображения $\bar{f}$ будем иметь $\alpha_{\bar{f}} \equiv 0$.

Доказательство. При условиях леммы мы меняем отображение f на клетке σ^{i-1} на новое отображение $\bar{f}: \sigma^{i-1} \rightarrow X$, так что они совпадают на $\partial\sigma^{i-1}$; при этом пара отображений $f, \bar{f}$ клетки σ^{i-1} определяют вместе отображение $S^{i-1} \rightarrow X$, дающее элемент $-\beta(\sigma^{i-1})$ в группе $\pi_{i-1}(X)$. После такого изменения отображения f мы получим для нового отображения $\bar{f}$, что $\alpha_{\bar{f}} = \alpha_f - \delta\beta \equiv 0$.

Лемма доказана.

В результате лемм 1 и 2 мы получаем

Вывод. Определено «первое препятствие» к продолжению отображения $\alpha_f \in H^i(K, L; \pi_{i-1}(X))$ при попытке продолжить отображение f с подкомплекса $L \cup K^{i-1}$ на комплекс $L \cup K^i$. Его равенство нулю достаточно для продолжения (см. лемму 2). Продолжение, очевидно, возможно, если $\pi_{i-1}(X) = 0$.

Задача 2. Пусть $\pi_q(X) = 0$ при $i < q$ и $f: K^q \rightarrow X$ — отображение q -мерного остова. Пусть X не имеет клеток размерностей $0 < p < q-1$ (приведенный комплекс — см. § 4). Тогда любая клетка σ^q из комплекса K определяет элемент $\beta(\sigma^q) \in \pi_q(X)$ отображением $\sigma^q \rightarrow X$. Докажите, что препятствие к продолжению этого отображения на остов K^{q+1} есть коцепь $\alpha_f = \delta\beta$. В частности, отображение f продолжается на K^{q+1} , если β — коцикл.

Б. Рассмотрим «препятствие к гомотопии» двух отображений f и $g: K \rightarrow X$, которые уже совпадают на остове K^{q-1} . На остове K^q на любой клетке $\sigma^q \subset K^q$ имеем два отображения $f, g: \sigma^q \rightarrow X$, совпадающие на границе: $f|_{\partial\sigma^q} = g|_{\partial\sigma^q}$. Совместно f и g дают отображение сферы $S^q \rightarrow X$. Это «различающий элемент» $\alpha(\sigma^q, f, g) \in \pi_q(X)$. Итак, имеем «различающую коцепь»

$$\alpha(\sigma^q, f, g) \in \pi_q(X).$$

Задача 3. Покажите, что $\delta\alpha = 0$. Покажите, что для случая $\alpha = \delta\beta$ гомотопию между f и g можно изменить на остове K^{q-1} , не трогая остов K^{q-2} , после чего будем иметь $\alpha \equiv 0$. Поэтому различающая лежит в $H^q(K, \pi_q(X))$.

Задача 4. Пусть имеется пара (K, L) , $L \subset K$, и задано отображение $f: L \rightarrow T^n$ в n -мерный тор. Необходимое условие

продолжения отображения f с L на K таково: если $\gamma \in \pi_1(L)$ и вложение $i: L \rightarrow K$ обращает этот элемент в единичный, $i_*(\gamma) = 1$, то должно быть и $f_*(\gamma) = 1$ в торе T^n . Докажите, что это условие достаточно для продолжения. Докажите, что для продолжения отображения достаточно также аналогичного условия в гомологиях, т. е. для $\gamma \in H_1(L)$. Такая ситуация возникает, например, в теории узлов (см. [1], ч. II, § 26).

Задача 5. Найдите множество $\pi(K, T^n)$ гомотопических классов отображений $K \rightarrow T^n$ (в частности, для $n=1$ в S^1). Более общо: пусть $X = K(D, n)$ — такое пространство («комплекс Эйленберга—Маклейна»), что $\pi_i(X) = 0$, $i \neq n$, и $\pi_n(X) = D$ — абелева группа. Докажите, что $\pi(K, X) = H^n(K, D)$. Для $n=1$ проверьте, что $H^1(K, D)$ и $\pi(K, X)$ определяются гомоморфизмами $\pi_1(K) \rightarrow D$. Этот результат о $\pi(K, X)$ верен и для неабелевых D при $n=1$. Примеры:

$$n=1: D=Z, K(Z, 1)=S^1,$$

$$D=Z \times \dots \times Z, K(D, 1)=T^n,$$

$$D=\pi_1(M_g^2), K(D, 1)=M_g^2 \text{ (поверхность рода } g \geq 1),$$

$$D=Z_m, K(D, 1)=S^\infty/Z_m \text{ (для } m=2 \text{ имеем } K(Z_2, 1)=\mathbb{R}P^\infty \text{ или } \mathbb{R}P^N, N \rightarrow \infty),$$

$$D=F \text{ (свободная группа), } K(F, 1)=S^1 \vee \dots \vee S^1 \text{ (букет окружностей).}$$

Примеров пространств $K(D, 1)$ с разными группами $D = \pi_1(X)$ очень много. Единственным просто строящимся пространством $K(D, 2)$ является (см. [1], ч. II, § 24) случай $n=2$, $D=Z$, $K(D, 2)=\mathbb{C}P^\infty = S^\infty/S^1$.

Задача 6. Пусть K^n — комплекс размерности n . Найдите гомотопические классы отображений $K^n \rightarrow S^n$. Докажите равенство

$$\pi(K^n, S^n) = H^n(K^n, Z).$$

В. Совершенно аналогичной является задача о построении и гомотопии сечений расслоений $E \xrightarrow{p} B$ со слоем F , где база B представлена в виде симплициального или клеточного комплекса. Опять, для простоты, мы предположим, что база B односвязна (или, более слабо, $\pi_1(B)$ не действует на группах $\pi_1(F)$ переносами) и слой F также односвязен или гомотопически прост.

Пусть задано сечение φ на остове $B^{q-1} \subset B$. Над симплексом $\sigma^q \subset B^q$ имеется прямое произведение $\rho^{-1}(\sigma^q) = \sigma^q \times F$. На границе $\partial\sigma^q = S^{q-1}$ имеется сечение $\varphi: \partial\sigma^q \rightarrow \partial\sigma^q \times F$, где $\rho\varphi = 1$. Поэтому определено отображение $\partial\sigma^q = S^{q-1} \rightarrow F$, задающее элемент $\alpha(\sigma^q, \varphi) \in \pi_{q-1}(F)$ (препятствующая коцепь).

Задача 7. Докажите, что $\delta\alpha = 0$.

Задача 8. Докажите, что для $\alpha = \delta\beta$ можно изменить сечение на остоле B^{q-1} , не трогая его на B^{q-2} , что $\alpha \equiv 0$. Тем самым $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$.

Задача 9. Пусть слой есть сфера $S^{q-1} = F$. Покажите, что препятствие $[\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))]$ есть «эйлеров класс» расслоения (см. [1], ч. II, § 25), определяющийся с помощью связности в расслоении при нечетных $q-1$ для расслоений с группой $G = SO(q)$ как элемент из $H^q(B, \mathbb{R})$.

Задача 10. Рассмотрите препятствие к гомотопности двух сечений φ_1 и $\varphi_2: B \rightarrow E$, где $p\varphi_1 = p\varphi_2 = 1$. Пусть сечения совпадают на остоле $B^{q-1} \subset B$. Определите препятствие к гомотопии и исследуйте его свойства

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \in H^q(B, \pi_q(F)).$$

Пример 1. Пусть слой стягиваем, $\pi_i(F) = 0$ для всех i ; тогда сечение всегда существует, и все сечения гомотопны. Например:

а) F есть множество положительных римановых метрик (в данной точке) на многообразии M^n . Мы знаем (см. [1], ч. II, § 8), что сечение — метрика — всегда существует, и два сечения (две положительные метрики) гомотопны — их можно соединить путем. Если метрика индефинитна (например, типа (p, q)), то этот результат неверен. Каковы группы $\pi_i(F)$ для этого случая? Заметим, что $F = GL(n, \mathbb{R})/O(p, q)$, $p+q = n$.

б) F есть множество «горизонтальных площадок» в данной точке расслоения $E \rightarrow B$ или связностей (см. [1], ч. II, § 24, где доказывалось существование связности).

Пример 2. Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — расслоение с группой $G = O(n)$ и слоем $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим ассоциированное расслоение k -реперов (ортонормированных). $E_k \xrightarrow{p} B$, слой $F_k = V_{n,k}$ (многообразие Штифеля k -реперов в $\mathbb{R}^n$). В частности, для $k = n$ имеем $F_n = O(n)$ и для $k = 1$ имеем $F_1 = S^{n-1}$. Сведения о гомотопических группах слоя мы получаем из [1], ч. II, § 24:

$$\pi_i(V_{n,k}) = 0, \quad i < n-k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n-k \text{ нечетно,} \\ \mathbb{Z}_2, & n-k \text{ четно.} \end{cases}$$

Препятствующий класс когомологий для построения сечения этих расслоений имеет вид («первое препятствие»)

$$\alpha_k \in H^{n-k+1}(B, \pi_{n-k}(V_{n,k}))$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Определение 1. Класс $\alpha_k \pmod{2}$ называется «классом Штифеля—Уитни» расслоения и обозначается через

$$W_q = \alpha_{n-q+1} \pmod{2} \in H^q(B, \mathbb{Z}_2), \quad q = 1, \dots, n.$$

По определению полагают $W_0 = 1$ и составляют «полином Штифеля—Уитни»

$$W(t) = 1 + W_1 t + \dots + W_q t^q + \dots,$$

где t — формальная переменная. Классами Штифеля—Уитни гладкого многообразия M^n называют классы его касательного расслоения.

Задача 11. Докажите, что равенство $W_1 = 0$ необходимо и достаточно для ориентируемости многообразия M^n . Покажите, что W_n есть эйлерова характеристика $\pmod{2}$.

Задача 12. Докажите, что для прямых произведений многообразий (или для прямых произведений расслоений) мы имеем

$$W(t) = \overline{W}(t) \overline{W}(t)$$

(произведение в кольце когомологий $H^*(\cdot, \mathbb{Z}_2)$ и $\overline{W}, \overline{W}$ — полиномы Штифеля—Уитни сомножителей).

Задача 13. Докажите, что для стандартного одномерного нетривиального расслоения η над RP^n («листа Мёбиуса» — см. [1], ч. II, § 24) мы имеем

$$W(t) = 1 + W_1 t, \quad W_1 \in H^1(RP^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad W_1 \neq 0.$$

Вычислите полином Штифеля—Уитни касательного расслоения τ над RP^n , используя следующий результат: $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta$ (см. задачу 1 из [1], ч. II, § 24).

Задача 14. Рассмотрите k векторных полей $\eta_1, \dots, \eta_k$ на многообразии M^n (в общем положении). Возникает «цикл особенностей», где эти поля линейно зависимы. Покажите, что это — цикл $\pmod{2}$ в группе $H_{k-1}(M^n, \mathbb{Z}_2)$, двойственный по Пуанкаре классу Штифеля—Уитни W_{n-k+1} .

Пример 3. Рассмотрим комплексное расслоение $E \xrightarrow{p} B$ со слоем $\mathbb{C}^n$ и группой $G = U(n)$ и ассоциированные расслоения унитарных k -реперов (комплексных) в нем $E_k \xrightarrow{p} B$, слой $F_k = V_{n,k}^{\mathbb{C}}$. Мы знаем гомотопические группы (см. [1], ч. II, § 24):

$$\pi_i(V_{n,k}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \leq 2(n-k),$$

$$\pi_{2(n-k)+1}(V_{n,k}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}.$$

Первое препятствие к построению сечения расслоения $E_k \xrightarrow{p} B$ есть элемент из целочисленных когомологий

$$c_{n-k+1} \in H^{2n-2k+2}(B, \pi_{2n-2k+1}(V_{n,k}^{\mathbb{C}})) = H^*(B, \mathbb{Z}).$$

Определение 2. Класс c_q^{τ} называется «классом Чженя» ($q = 1, \dots$) расслоения $E \xrightarrow{p} B$. Если $B = M^{2n}$ — комплексное многообразие, то классы Чженя касательного расслоения называются классами этого многообразия. Вводится «полином Чженя»

$$c(t) = 1 + c_1 t + \dots + c_q t^q + \dots,$$

где t — формальная переменная.

Задача 15. Покажите, что для произведения расслоений (или многообразий) справедлива формула

$$c(t) = \bar{c}(t) \bar{c}(t),$$

где $\bar{c}, \bar{c}$ — полиномы Чженя сомножителей.

Задача 16. Покажите, что для стандартного U_1 -расслоения η над CP^n мы имеем

$$c(t) = 1 + c_1 t,$$

где $c_1 \in H^2(CP^n, \mathbb{Z})$ — базисный элемент.

Найдите полином Чженя касательного расслоения τ над CP^n , пользуясь тем, что $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta$ (докажите! см. [1], ч. II, § 24).

Задача 17. Покажите, что для комплексных многообразий M^{2n} класс c_n совпадает с эйлеровой характеристикой. Найдите полиномы Чженя римановых поверхностей.

Задача 18. Покажите, что структурную группу $U(n)$ -расслоения можно свести к $SU(n)$, если и только если $c_1 = 0$.

Задача 19. Для комплексно-сопряженного расслоения $\bar{\xi}$ к расслоению ξ с базой B (см. [1], ч. II, § 24) докажите равенство

$$c(t, \bar{\xi}) = c(-t, \xi)$$

или

$$c_{2i}(\bar{\xi}) = c_{2i}(\xi),$$

$$c_{2i+1}(\bar{\xi}) = -c_{2i+1}(\xi).$$

Задача 20. Докажите, что классы Чженя c_q^{τ} рассмотренные в группе $H^{2q}(B, \mathbb{R})$, совпадают с теми, которые определяются через связности в расслоениях (см. [1], ч. II, § 25). Особенно просто это для класса c_1 . Тем самым ранее определенные классы как выражения от тензора кривизны (после нормировки) имеют всегда целочисленные интегралы по циклам в любом расслоении.

Задача 21. Докажите, что полином Чженя (mod 2) комплексного расслоения ξ определяет полином Штифеля—Уитни этого же расслоения как вещественного — или расслоения $r\xi$, где r — операция «овеществления» — см. [1], ч. II, § 24.

Пример 4. Рассмотрим вещественное $O(n)$ -расслоение η . Можно «комплексифицировать» это расслоение (см. [1], ч. II, § 24):

$$\eta \rightarrow c\eta = \bar{\xi}.$$

Расслоение $\xi = c\eta$ имеет группу $G = U(n)$ и является «самосопряженным». Это означает, что расслоения ξ и $\bar{\xi}$ изоморфны: $\xi \approx \bar{\xi}$ (проверьте).

Определение 3. Классы Чженя $(-1)^i c_{2i}$ комплексного расслоения $\xi = c\eta$ называются *характеристическими классами* (Понтрягина) вещественного расслоения η и обозначаются через $p_i(\eta) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$.

Из изоморфизма $\xi \approx \bar{\xi}$ мы получаем

$$c_{2i}(\bar{\xi}) = c_{2i}(\xi) = p_i(\eta),$$

$$c_{2i+1}(\bar{\xi}) = -c_{2i+1}(\xi),$$

и тем самым $2c_{2i+1} = 0$. Поэтому классы c_{2i+1} не рассматриваются в вещественном случае.

Задача 22. Вычислите классы $p_i(CP^n)$.

Задача 23. Найдите класс $p_1(M_{(n)}^4)$ для неособого многообразия M^4 , заданного в CP^3 одним уравнением (в конечной области $\mathbb{C}^3 \subset CP^3$) степени n .

Задача 24. Докажите совпадение классов p_i с классами, определенными через связности в расслоениях (см. [1], ч. II, § 25).

Задача 25. Докажите, что если ориентируемое многообразие M^4 является краем ориентируемого многообразия, т. е. $M_4 = \partial W^5$, то $p_1(M^4) = 0$. Более общо: если $M^n = \partial W^{n+1}$, то всякий полином размерности n от классов W_q и p_s тривиален (для неориентируемого случая — только от W_q). Выразите классы $p_s \pmod{2}$ через W_q .

§ 10. Гомологии и методы вычисления гомотопических групп. Теорема Картана — Серра. Когомологические операции. Векторные расслоения

1. Понятие когомологической операции. Примеры.

Проблема вычисления гомотопических групп многообразий и конечных комплексов является чрезвычайно трудной. Для односвязных комплексов, где группа π_1 действует на всех π_i , эта проблема является алгоритмически неразрешимой в самом сильном смысле математической логики. Даже для наиболее важного и простого случая односвязных комплексов (например, сферы) конкретное вычисление гомотопических групп оказывается очень трудной нерешенной проблемой. Прямые геометрические методы позволяют получить отдельные результаты о гомотопических группах (см. [1], ч. II) в некоторых частных случаях. Регулярные методы вычисления гомотопических групп удается построить на базе гомологической теории расслоенных пространств вместе с теорией гомотопий, уже изложенных выше. Мы укажем здесь способ получения информации о бесконечных частях гомотопи-

Определение 2. Класс c_q^{τ} называется «классом Чженя» ($q = 1, \dots$) расслоения $E \xrightarrow{p} B$. Если $B = M^{2n}$ — комплексное многообразие, то классы Чженя касательного расслоения называются классами этого многообразия. Вводится «полином Чженя»

$$c(t) = 1 + c_1 t + \dots + c_q t^q + \dots,$$

где t — формальная переменная.

Задача 15. Покажите, что для произведения расслоений (или многообразий) справедлива формула

$$c(t) = \bar{c}(t) \bar{\bar{c}}(t),$$

где $\bar{c}, \bar{\bar{c}}$ — полиномы Чженя сомножителей.

Задача 16. Покажите, что для стандартного U_1 -расслоения η над $\mathbb{C}P^n$ мы имеем

$$c(t) = 1 + c_1 t,$$

где $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ — базисный элемент.

Найдите полином Чженя касательного расслоения τ над $\mathbb{C}P^n$, пользуясь тем, что $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta$ (докажите! см. [1], ч. II, § 24).

Задача 17. Покажите, что для комплексных многообразий M^{2n} класс c_n совпадает с эйлеровой характеристикой. Найдите полиномы Чженя римановых поверхностей.

Задача 18. Покажите, что структурную группу $U(n)$ -расслоения можно свести к $SU(n)$, если и только если $c_1 = 0$.

Задача 19. Для комплексно-сопряженного расслоения $\bar{\xi}$ к расслоению ξ с базой B (см. [1], ч. II, § 24) докажите равенство

$$c(t, \bar{\xi}) = c(-t, \xi)$$

или

$$\begin{aligned} c_{2i}(\bar{\xi}) &= c_{2i}(\xi), \\ c_{2i+1}(\bar{\xi}) &= -c_{2i+1}(\xi). \end{aligned}$$

Задача 20. Докажите, что классы Чженя c_q^{τ} , рассмотренные в группе $H^{2q}(B, \mathbb{R})$, совпадают с теми, которые определяются через связности в расслоениях (см. [1], ч. II, § 25). Особенно просто это для класса c_1 . Тем самым ранее определенные классы как выражения от тензора кривизны (после нормировки) имеют всегда целочисленные интегралы по циклам в любом расслоении.

Задача 21. Докажите, что полином Чженя (mod 2) комплексного расслоения ξ определяет полином Штифеля—Уитни этого же расслоения как вещественного — или расслоения $r\xi$, где r — операция «овеществления» — см. [1], ч. II, § 24.

Пример 4. Рассмотрим вещественное $O(n)$ -расслоение η . Можно «комплексифицировать» это расслоение (см. [1], ч. II, § 24):

$$\eta \rightarrow c\eta = \xi.$$

Расслоение $\xi = c\eta$ имеет группу $G = U(n)$ и является «самосопряженным». Это означает, что расслоения ξ и $\bar{\xi}$ изоморфны: $\xi \approx \bar{\xi}$ (проверьте).

Определение 3. Классы Чженя $(-1)^i c_{2i}$ комплексного расслоения $\xi = c\eta$ называются *характеристическими классами* (Понтрягина) вещественного расслоения η и обозначаются через $p_i(\eta) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$.

Из изоморфизма $\xi \approx \bar{\xi}$ мы получаем

$$\begin{aligned} c_{2i}(\bar{\xi}) &= c_{2i}(\xi) = p_i(\eta), \\ c_{2i+1}(\bar{\xi}) &= -c_{2i+1}(\xi), \end{aligned}$$

и тем самым $2c_{2i+1} = 0$. Поэтому классы c_{2i+1} не рассматриваются в вещественном случае.

Задача 22. Вычислите классы $p_i(\mathbb{C}P^n)$.

Задача 23. Найдите класс $p_1(M_{(n)}^4)$ для неособого многообразия M^4 , заданного в $\mathbb{C}P^3$ одним уравнением (в конечной области $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$) степени n .

Задача 24. Докажите совпадение классов p_i с классами, определенными через связности в расслоениях (см. [1], ч. II, § 25).

Задача 25. Докажите, что если ориентируемое многообразие M^4 является краем ориентируемого многообразия, т. е. $M_4 = \partial W^5$, то $p_1(M^4) = 0$. Более общо: если $M^n = \partial W^{n+1}$, то всякий полином размерности n от классов W_q и p_s тривиален (для неориентируемого случая — только от W_q). Выразите классы p_s (mod 2) через W_q .

§ 10. Гомологии и методы вычисления гомотопических групп. Теорема Картана — Серра. Когомологические операции. Векторные расслоения

I. Понятие когомологической операции. Примеры.

Проблема вычисления гомотопических групп многообразий и конечных комплексов является чрезвычайно трудной. Для неограниченных комплексов, где группа π_1 действует на всех π_i , эта проблема является алгоритмически неразрешимой в самом сильном смысле математической логики. Даже для наиболее важного и простого случая односвязных комплексов (например, сферы) конкретное вычисление гомотопических групп оказывается очень трудной нерешенной проблемой. Прямые геометрические методы позволяют получить отдельные результаты о гомотопических группах (см. [1], ч. II) в некоторых частных случаях. Регулярные методы вычисления гомотопических групп удается построить на базе гомологической теории расслоенных пространств вместе с теорией гомотопий, уже изложенных выше. Мы укажем здесь способ получения информации о бесконечных частях гомотопи-

ческих групп $\pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, для односвязных комплексов, который уже частично обсуждался в задачах к § 8. Заметим, что вычисление конечной части (кручения) гомотопических групп $\pi_i(K)$, как будет видно ниже, требует развития несравнимо более сложных методов. В основе всех алгебраических методов вычисления гомотопических групп, кроме уже изложенной теории гомотопий, лежат так называемые «когомологические операции», т. е. отображения $\theta: H^q(K, L; G_1) \rightarrow H^q(K, L; G_2)$, обладающие такими свойствами:

а) Отображение θ определено для всех комплексов K , L и гомотопически инвариантно;

б) отображение θ «естественно» (другие термины — «функториально» или «ковариантно»): это означает, что оно коммутирует с непрерывными отображениями $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$

$$\theta f^* = f^* \theta.$$

Пример 1. $\theta(x) = x^m$, где $x \in H^q(K, L; G_1)$. Здесь $p = mq$. Для $G_2 = G_1 = \mathbb{Z}_p$, где $m = p$ — простое число, мы имеем $\theta(x+y) = x^p + y^p$, $\theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$, так как $\lambda^p = \lambda$. В этом случае θ — это линейное отображение. Для рационального поля $\mathbb{Q} = G_1 = G_2$ отображение θ не является гомоморфизмом.

Пример 2. $\theta(x) = \delta_*(x)$, где $x \in H^q(K, L; \mathbb{Z}_p)$, $\delta_*(x) \in H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p)$.

Определение гомоморфизма δ_* было дано в § 3: если элемент x представлен целочисленной коцепью $\bar{x} \in C^p(K, L; \mathbb{Z})$, $x = \bar{x} \bmod p$, то $\delta_* x = \left(\frac{1}{p} \delta \bar{x}\right) \bmod p$.

Имеется естественное обобщение $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_k$ гомоморфизма $\delta_1 = \delta_*$: если $x \in \text{Ker } \delta_*$, т. е. коцепь $\left(\frac{1}{p} \delta \bar{x}\right) \bmod p$ когомологична нулю, то $\frac{1}{p} \delta \bar{x} = py + \delta z$. Поэтому определено соответствие

$$y \bmod p = \delta_2(\bar{x}) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \delta x - \delta z \right).$$

Задача 1. Проверьте, что δ_2 — это корректно определенный гомоморфизм

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \subset \text{Ker } \delta_1 \xrightarrow{\delta_2} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p) / \text{Im } \delta_1,$$

коммутирующий с непрерывными отображениями, т. е. $f^* \delta_2 = \delta_2 f^*$. Постройте аналогично высшие гомоморфизмы

$$\delta_k: \bigcap_{i < k} \text{Ker } \delta_i \rightarrow H^{q+1} / \bigcup_{i < k} \text{Im } \delta_i.$$

Гомоморфизмы δ_k при $k \geq 2$ не всюду определены и неоднозначны. Поэтому их называют «вышними» или «частичными» когомологическими операциями. Значение гомоморфизмов δ_k таково: если

нам известна структура $H^*(K, L; \mathbb{Z}_p)$ и действие операторов δ_k , то мы можем восстановить целочисленную группу когомологий $H^*(K, L; \mathbb{Z})/\Gamma_p$, где Γ_p — периодическая часть порядка, взаимно простого с p .

Задача 2. Ядро всех δ_k на $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ есть результат приведения $\bmod p$ целочисленной группы $H^*(K; \mathbb{Z})$.

Задача 3. Если $x = \delta_k y$ и $x \neq \delta_q z$ для $q < k$, то элемент x представляет образующий элемент $\bar{x} \in H^*(K; \mathbb{Z})$ порядка p^k .

Таким образом, знание операторов δ_k для всех p в когомологиях $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ (или в гомотопиях $H_*(K; \mathbb{Z}_p)$, где они сопряжены когомологическим) позволяет восстановить целочисленные гомотопии и когомологии.

Операторы δ_k обладают следующими свойствами:

а) они определены на группах H^q для всех q (или на их подгруппах) и являются гомоморфизмами;

б) они коммутируют с гомоморфизмом δ точной последовательности пары (проверьте!)

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p), \\ \delta \delta_k = \delta_k \delta.$$

При $k=1$ операция $\delta_1 = \delta_*$ всюду определена и однозначна.

Определение 1. Операции θ , обладающие свойствами а) и б), называются «стабильными».

Главной причиной, облегчающей вычисления гомотопических групп $\pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$, является отсутствие нетривиальных (не сводящихся к операции возведения в степень) когомологических операций в рациональных когомологиях $H^*(\ ; \mathbb{Q})$ (это будет доказано ниже). Единственной «стабильной» когомологической операцией на рациональных (вещественных, комплексных) когомологиях является операция умножения на число (скаляр):

$$\theta(x) = \lambda x: H^q \rightarrow H^q.$$

Пример оператора δ_* показывает, что в когомологиях $H^*(\ ; \mathbb{Z}_p)$ есть нетривиальные стабильные когомологические операции. Без доказательства укажем, что в когомологиях $\bmod p$ имеется много нетривиальных стабильных операций (см. [45]).

Теорема 1 (Стинрод). 1) Пусть $p = 2$. Для любого числа $i \geq 0$ имеется стабильная когомологическая операция θ , обозначаемая через Sq^i , дающая гомоморфизм

$$Sq^i: H^q(K, L; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{q+i}(K, L; \mathbb{Z}_2)$$

для всех q . Операция Sq^i обладает свойствами

а) $Sq^i(x) = 0$, если $q < i$;

б) $Sq^0 \equiv 1$;

в) $Sq^i(x) = x^2$, $q = i$;

$$г) Sq^i(xy) = \sum_{l+k=i} Sq^l(x) Sq^k(y);$$

$$д) Sq^1(x) = \delta_* x.$$

2) Пусть $p > 2$. Для любого $i \geq 0$ определены стабильные операции St_p^i

$$St_p^i: H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(K, L; \mathbb{Z}_p)$$

такие, что

$$а) St_p^i(x) = 0, q < 2i;$$

$$б) St_p^0 \equiv 1;$$

$$в) St_p^i(x) = x^p, q = 2i;$$

$$г) St_p^i(xy) = \sum_{k+l=i} St_p^k(x) St_p^l(y).$$

Все стабильные операции выражаются через произведения (суперпозицию) операций Стиррода (это сложная теорема). Между ними имеются нетривиальные алгебраические соотношения: вся эта структура, как будет ясно далее, создает сложный процесс вычисления конечной части гомотопических групп. Заметим, что простейшей иллюстрацией возможности такого применения является структура двуклеточного комплекса: элемент $x \in \pi_{k+q}(S^q)$ определяет двуклеточный комплекс

$$K_x = D^{k+q+1} \cup_x S^q$$

такой, что

$$H^q(K_x; G_1) = G_1, \quad H^{k+q+1}(K_x; G_2) = G_2$$

(образующие соответственно z и w). Для случая $q = n, k + q + 1 = 2n$ такой комплекс обсуждался § 7.

Л е м м а 1. Если найдется нетривиальная когомологическая операция $\theta: H^q(-; G_1) \rightarrow H^{q+k+1}(-; G_2)$ такая, что $\theta(z) \neq 0$, то элемент $x \neq 0$, где $x \in \pi_{k+q}(S^q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гомотопический тип комплекса K_x для $x = 0$ имеет вид букета $K_x \sim S^{q+k+1} \vee S^q$. Рассмотрим отображение $K_x \xrightarrow{\pi} S^q$, тождественное на одном слагаемом S^q и проектирующее второе слагаемое S^{k+q+1} в одну точку. Так как $S^q \subset K_x$, мы имеем проекцию $K_x \xrightarrow{\pi} K_x$ такую, что

$$\pi^* = 1: H^q \rightarrow H^q,$$

$$\pi^* = 0: H^{q+k+1} \rightarrow H^{q+k+1}.$$

Так как $\theta(\pi^*z) = \pi^*\theta(z)$ по определению когомологической операции, то мы имеем $0 = \theta(\pi^*z) = \theta(z)$. Лемма доказана.

Тривиальный пример: $q = n, x$ — это умножение на $2^s \in \mathbb{Z} = \pi_n(S^n)$; $\theta = \delta_s: H^n(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(K; \mathbb{Z}_2)$.

II. Комплексы Эйленберга — Маклейна и операции.

Мы уже вводили «комплексы Эйленберга — Маклейна» $K(D, n) = K$ такие, что

$$\pi_n(K) = D, \quad \pi_j(K) = 0, \quad j \neq n$$

(см. § 9). Примем как факт, что такие комплексы существуют (см. [45]) для всех (D, n) и являются клеточными комплексами или им гомотопически эквивалентны.

Очевидно следующее:

$$K(D_1 \times D_2, n) = K(D_1, n) \times K(D_2, n),$$

$$\Omega(K(D, n)) = K(D, n-1).$$

Действительно, используем следующее равенство (см. [1], ч. II, § 24): $\pi_j(\Omega(X)) = \pi_{j+1}(X)$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Для любого клеточного комплекса X гомотопический класс отображения $f: X \rightarrow K(D, n)$ полностью определяется некоторым элементом группы когомологий $x \in H^n(X; D)$; верен канонический изоморфизм $[X; K(D, n)] \approx H^n(X; D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть задана коцепь $\bar{x} \in C^n(X; D)$. Зададим отображение остова X^{n-1} в одну точку. На остове X^n отображение зададим так: клетке $\sigma^n \subset X^n$ поставлен в соответствие элемент $\bar{x}(\sigma^n) \in \pi_n(K(D, n)) = D$. Граница $\partial\sigma^n$ уже отображена в точку. Отображаем клетку $\sigma^n \rightarrow K(D, n)$ в соответствии с элементом $\bar{x}(\sigma^n)$ из $\pi_n(K(D, n))$. Продолжим отображение на остов X^{n+1} . Это возможно, если и только если $\delta\bar{x} = 0$ (см. § 9). Далее, предположим по индукции, что на остове X^{n+i} уже построено отображение $f: X^{n+i} \rightarrow K(D, n)$. Так как $\pi_j(K(D, n)) = 0$ при $j \neq n$, препятствие к продолжению отображения f равно нулю, и мы продолжаем отображения по остовам на все X .

б) Пусть заданы два отображения $f: X \rightarrow K, g: X \rightarrow K$, построенные по двум когомологическим коциклам $x, \bar{x}$, $\bar{x} - x = \delta y$; можно в соответствии с § 9 изменить отображение f на остове размерности $n-1$ так, что $\bar{x} \rightarrow \bar{x} - \delta y$. После этого будем иметь $\bar{x} \equiv x$. Из равенства нулю всех групп $\pi_j(K)$ при $j > n$ следует, что отображения гомотопны.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Множество всех когомологических операций $\theta: H^n(M, L; D) \rightarrow H^p(M, L; G)$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^p(K; G) = H^p(K(D, n); G)$.

Доказательство. Рассмотрим «канонический» элемент $u \in H^n(K(D, n); D)$, определяемый так: по теореме Гуревича имеем $H_n(K(D, n), \mathbb{Z}) = \pi_n = D$. Далее, $H^n(K; G_1) = \text{Hom}(D, G_1)$, где $\text{Hom}(D, G_1)$ — гомоморфизмы абелевой группы D в G_1 . Если $D = G_1$, то в множестве $\text{Hom}(D, D)$ имеется «единичный» элемент $u \in \text{Hom}(D, D)$ — тождественный гомоморфизм. Мы видим из доказательства теоремы 2, что соответственно $H^n(X, D) \approx [X, K]$ устанавливается так: если задано отображение f , то

$$[f] \leftrightarrow f^*(u) \in H^n(X; D).$$

Докажем теорему 3. Если задана когомологическая операция θ , то определен элемент $\theta(u) \in H^p(K; G)$. Имеем соответствие $\theta \rightarrow \theta(u)$.

Пусть задан элемент $\theta(u) \in H^p(K; G)$ и любой комплекс X . Фиксируем элемент $x \in H^n(X; D)$. Имеем в силу теоремы 2 отображение $f: X \rightarrow K$, где $f^*u = x$. Полагаем $\theta(x) = \theta(f^*u) = f^*\theta(u)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Для любой конечно порожденной абелевой группы D кольцо когомологий $H^*(K(D, n); \mathbb{Q})$ является свободной косокоммутативной алгеброй, порожденной образующими из линейного пространства $D^* = \text{Hom}(D, \mathbb{Q}) = H^n(K; \mathbb{Q})$.

Доказательство. Группа D есть прямая сумма циклических групп $D = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots$. Для $D = Z_m$ мы докажем сейчас, что $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0, q > 0$. Для $K = K(D; 1)$ это установлено в § 9, так как

$$K(D, 1) = S^\infty/Z_m = L_m^{2N-1}(1, \dots, 1), N \rightarrow \infty.$$

Пусть это уже доказано для $p < n$.

Рассмотрим расслоение Серра:

$$E \rightarrow K(D, n), \quad F = K(D, n-1),$$

$\pi_j(E) = 0, j > 0$. Из спектральной последовательности в когомологиях $H^*(; \mathbb{Q})$ мы имеем $E_2^{p, q} = 0$, если $q > 0$, $E_2^{p, 0} = H^p(B; \mathbb{Q})$. Поэтому все $d_2 \equiv 0$ при $r \geq 2$ и $E_\infty^{p, 0} = E_2^{p, 0} = H^p(E; \mathbb{Q}) = 0$. Поэтому $E_2^{q, 0} = H^q(B) = H^q(K(D, n)) = 0$. Для $D = Z_m$ и поэтому для $D = Z_{m_1} \times \dots \times Z_{m_k}$ имеем $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0$ для всех $q > 0$.

Пусть $D = \mathbb{Z}$. Рассмотрим расслоение Серра, предполагая по индукции, что теорема доказана для всех $p < n$. Имеем два случая:

- а) n четно, $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \bigwedge [u_{n-1}]$;
- б) n нечетно, $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[u_{n-1}]$.

Из этого и из условия $H^q(E; \mathbb{Q}) = 0$ при $q > 0$ мы должны извлечь, что спектральная последовательность выглядит одним из двух способов:

а)

$n-1$	u	0	uv	0	uv^2
		0		0	
0	1	0	v	0	v^2
	0		n		

$$d_i = 0, i \geq 2, i \neq n;$$

$$d_n(u) = v;$$

$$d_n(v) = 0.$$

б)

$2n-2$	u^2		u^2v
		0	
$n-1$	u		uv
0	1		v

$$d_i = 0, i \geq 2, i \neq n;$$

$$d_n(u) = v,$$

$$d_n(v) = 0.$$

Здесь существенно используется когомологическое умножение в спектральной последовательности. После этого нужный результат почти очевиден из указанных таблиц, поскольку в обоих случаях мы имеем $E_{n+1}^{p, q} = 0$ для всех p, q .

Так как $D = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times Z_{m_1} \times \dots \times Z_{m_k}$, теорема 4 доказана.

III. Вычисление гомотопических групп $\pi_i \otimes \mathbb{Q}$.

Теорема 5 (Картан—Серр). Пусть кольцо когомологий односвязного (или гомотопически простого) пространства X над $\mathbb{Q}$ до размерности k изоморфно свободной косокоммутативной алгебре со свободными образующими $x_j \in H^{\alpha_j}(X; \mathbb{Q})$, где $\alpha_j < k$. Тогда верны следующие утверждения:

а) гомоморфизм Гуревича

$$H: \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_i(X; \mathbb{Q})$$

имеет нулевое ядро для всех $i < k-1$.

б) образ $H(\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q})$ имеет нулевое скалярное произведение со всеми элементами $x \in H^*(X; \mathbb{Q})$, которые нетривиально разлагаются в произведения $x = yz$, $\deg y > 0$, $\deg z > 0$.

в) группа $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ изоморфна (сопряжена) фактору $H^i(X; \mathbb{Q})/\Gamma$, где Γ состоит точно из всех элементов, нетривиально разложимых в произведение, $i < k - 1$.

Доказательство. В силу теоремы 4 наше утверждение верно для комплексов $K(D, n)$ и тем самым для любых прямых произведений (здесь $k = \infty$):

$$K = K(D_1, \alpha_1) \times K(D_2, \alpha_2) \times K(D_3, \alpha_3) \times \dots, \quad (*)$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$$

Зададим отображение $X \xrightarrow{f} K$, где K построено в виде (*) для набора свободных абелевых групп D_j рангов, равных числу свободных образующих x_j в размерности α_j . Отображение f в силу теоремы 2 берем таким, что $f^*: H^*(K; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ есть изоморфизм до размерности k , по условию теоремы. Согласно процедуре, указанной в § 8, превратим отображение f в расслоение $f: \tilde{X} \rightarrow K$, слой F , где $\tilde{X}$ гомотопически эквивалентно X .

Так как f^* — изоморфизм в размерностях меньше k , то из спектральной последовательности этого расслоения немедленно следует: $H^*(F; \mathbb{Q}) = 0$ в размерностях, меньших чем $k - 1$. Для односвязных X можно считать, что группа D_1 не свободная абелева, а совпадает точно с первой нетривиальной гомотопической группой комплекса X . Поэтому f_* — изоморфизм на группе $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(K)$. Поэтому мы будем иметь $\pi_1(F) = 0$ из точной последовательности расслоения (см. [11], ч. II, § 22).

Лемма. Если когомологии $H^q(F; \mathbb{Q})$ односвязного пространства F тривиальны при $q < k - 1$, то $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ при $i < k - 1$.

Доказательство леммы. По теореме Гуревича первая нетривиальная группа $\pi_{\alpha_2}(F)$ конечна. Рассмотрим отображение (расслоение) $f: F \rightarrow K(\pi_{\alpha_2}(F), 2)$ со слоем F_3 . Так как $H^*(K(\pi_{\alpha_2}(F), 2); \mathbb{Q}) = 0$, мы из спектральной последовательности видим $H^*(F_3; \mathbb{Q}) = H^*(F; \mathbb{Q})$. При этом пространство F_3 имеет уже нулевую группу $\pi_{\alpha_2}(F_3) = 0$, $\pi_j(F_3) = 0$, $j \leq \alpha_2$. По индукции мы сводим лемму к обычной теореме Гуревича. Лемма доказана.

Доказательство теоремы Картана—Серра. Из леммы мы получаем, что $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ для всех $i < k - 1$. Теорема об изоморфизме групп $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \approx \pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$ следует теперь из точной последовательности гомотопических групп расслоения.

Следствие 1. Для любой группы Ли гомотопические группы $\pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ нетривиальны только при нечетных $i = 2q - 1$ и

точно соответствуют свободным образующим кольца $H^*(G; \mathbb{Q}) = \bigwedge [x_1, \dots, x_k]$.

Следствие 2. Для сферы S^n имеем

$$n = 2k: \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}, \pi_{2n-1}(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q},$$

$$\pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0, j \neq n, 2n - 1.$$

$$n = 2k + 1: \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q},$$

$$\pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0, j \neq n.$$

Доказательство следствия 2 вытекает из следующего факта (см. § 7):

$$H^*(\Omega(S^n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[x_{n-1}], & n = 2k + 1, \\ \bigwedge [x_{n-1}] \otimes \mathbb{Q}[x_{2n-2}], & n = 2k. \end{cases}$$

Следствие 3. Если X — $(n - 1)$ -связный комплекс (т. е. $\pi_j(X) = 0$ при $j < n$), то для всех групп $\pi_q(X)$ для $q < 2n - 1$ мы имеем изоморфизм

$$H: \pi_q(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_q(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Доказательство сводится к тому, что произведения когомологий могут возникнуть лишь в размерности $2n$. Поэтому до размерности $2n - 1$ кольцо $H^*(X; \mathbb{Q})$ для $(n - 1)$ -связного комплекса всегда свободно.

Задача 4. Вычислите гомотопические группы букетов сфер $S^k \vee S^q$, $\pi_i(S^k \vee S^q) \otimes \mathbb{Q}$.

Во всех случаях вычисление групп $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ для односвязных комплексов сводится к вычислению рациональных когомологий $H^*(\Omega(X); \mathbb{Q})$, так как это кольцо — свободная косокоммутативная алгебра в силу § 7.

Следствие 4. Если X имеет гомотопический тип N -пространства до размерности N , то $H^*(X; \mathbb{Q})$ — свободная алгебра до размерности $N - 1$ и имеет место изоморфизм

$$\left(\sum_{i \leq N-2} \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \right)^* = \sum_{i \leq N-2} H^i(X; \mathbb{Q})/\Gamma,$$

где Γ состоит из всех нетривиально разложимых в произведения элементов и M^* — сопряженное пространство к M .

IV. Применение к векторным расслоениям. Характеристические классы.

Рассмотрим естественное отображение $G_{k,N} \times G_{l,M} \xrightarrow{\psi} G_{k+l, N+M}$, порожденное прямой суммой линейных пространств. Здесь $G_{k,N}$ — одно из вещественных, комплексных и кватернионных грассмановых многообразий. Устремляя $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, получим отображение

$$G_{k,\infty} \times G_{l,\infty} \xrightarrow{\psi} G_{k+l,\infty}$$

или (см. [1], ч. II, § 24)

$$BG_k \times BG_l \xrightarrow{\psi} B(G_{k+l}),$$

где BG_n — классифицирующее (универсальное) пространство группы G_n и G_n — это одна из групп $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Заметим теперь, что согласно результатам [1], ч. II, § 24 при вложениях $O(n) \subset O(n+1)$, $SO(n) \subset SO(n+1)$, $U(n) \subset U(n+1)$, $Sp(n) \subset Sp(n+1)$ гомотопический тип «стабилизируется»: точно это означает, что для любого комплекса X размерности $< N$ имеется изоморфизм гомотопических классов отображений $[X, BG]$

$$[X, G_n, \infty] = [X, G_{n+1}, \infty],$$

где $N = k$ для $G = O(n)$, $SO(n)$,

$$N = 2k \text{ для } G = U(n), SU(n),$$

$$N = 4k \text{ для } G = Sp(n).$$

Строго говоря, в [1], ч. II, § 24 это доказывалось для $[X, G]$. Так как $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$, то из равенства $\pi_i(G_1, G_2) = 0$ для вложения (группового) $G_2 \subset G_1$ следует

$$\pi_{i+1}(BG_1, BG_2) = 0$$

для тех же значений i . Поэтому вложение $BG_1 \rightarrow BG_2$ для указанных пар (G_1, G_2) стабилизирует гомотопический тип.

Можно ввести «предел» $G_\infty = 0$, SO , U , SU , Sp :

$$O = \lim_{N \rightarrow \infty} O(1) \subset O(2) \subset \dots \subset O(N) \subset \dots,$$

$$SO = \lim_{N \rightarrow \infty} SO(1) \subset SO(2) \subset \dots \subset SO(N) \subset \dots,$$

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(N) \subset \dots,$$

$$SU = \lim_{N \rightarrow \infty} SU(1) \subset SU(2) \subset \dots \subset SU(N) \subset \dots,$$

$$Sp = \lim_{N \rightarrow \infty} Sp(1) \subset Sp(2) \subset \dots \subset Sp(N) \subset \dots$$

Для групп G_∞ универсальные пространства BG_∞ уже являются H -пространствами

$$G_\infty \times G_\infty \xrightarrow{\psi} G_\infty \text{ (прямая сумма),}$$

$$BO \times BO \xrightarrow{\psi} BO,$$

$$BSO \times BSO \xrightarrow{\psi} BSO,$$

$$BU \times BU \xrightarrow{\psi} BU,$$

$$BSU \times BSU \xrightarrow{\psi} BSU,$$

$$BSp \times BSp \xrightarrow{\psi} BSp,$$

где роль «единицы H -пространства» $x_0 \in BG_\infty$ играет любая фиксированная точка (проверьте!). Можно сказать иначе: $BO(n)$ имеет гомотопический тип H -пространства до размерности $N = n$, $BSO(n)$ — до $N = n$, $BU(n)$ и $BSU(n)$ — до размерности $N = 2n$, $BSp(n)$ — до размерности $N = 4n$. Позднее (см. § 25) будет показано, что $BU \cong \Omega(U)$, $BSp \cong \Omega(\Omega(\Omega(SO)))$, $BSO \cong \Omega(\Omega(\Omega(Sp)))$.

Мы знаем кольца $H^*(G; \mathbb{Q})$ для $G = SO, U, SU, Sp$ — см. § 7. Тем самым, в силу теоремы Картана—Серра, мы знаем группы $\pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ — см. следствие 1 выше. Тем самым группы $\pi_{i+1}(BG) \otimes \mathbb{Q} \approx \pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ нам также известны. При этом базис сопряженных пространств $(\pi_i(BG) \otimes \mathbb{Q})^*$ до размерности N совпадает с мультипликативным базисом кольца $H^*(BG; \mathbb{Q})$ до размерности N (см. выше), так как BG имеет гомотопический тип H -пространства в этих размерностях.

Впрочем, кольца $H^*(BG; \mathbb{Q})$ всегда и во всех размерностях оказываются свободными кокоммутативными алгебрами, даже если BG и не является H -пространством. Это вытекает из такой задачи (теорема Борели):

Задача 5. Пусть задано расслоение Серра $E \rightarrow B$, слой $F = \Omega(B)$, где E стягиваемо и B односвязно. Если $H^*(F; \mathbb{Q})$ — внешняя алгебра, то $H^*(B; \mathbb{Q})$ — алгебра многочленов. Для случая $H^*(F; \mathbb{Q}) = \Lambda[x]$ эта теорема была доказана выше. Докажите сначала этот факт для $H^*(F; \mathbb{Q}) = \Lambda[x_1, x_2]$, затем для $\Lambda[x_1, x_2, x_3]$ и т. д.

Для групп G имеем:

$$H^*(BSO(2k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-1}, \chi], \quad \deg p_i = 4i, \\ \deg \chi = 2k, p_k = \chi^2;$$

$$H^*(BSO(2k+1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_k], \quad \deg p_i = 4i;$$

$$H^*(BU(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_k], \quad \deg c_i = 2i;$$

$$H^*(BSU(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_2, \dots, c_k], \quad \deg c_i = 2i;$$

$$H^*(BSp(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\gamma_1, \dots, \gamma_k], \quad \deg \gamma_i = 4i.$$

При этом из явной конструкции характеристических классов Чженя c_i (и вытекающей из нее явной конструкции всех остальных классов — см. § 9) мы знаем, что классы c_i, χ, p_i, γ_i целочисленны, т. е. принадлежат образу $H^*(BG; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BG; \mathbb{Q})$. Следуя гомологическому аналогу обычной техники теории групп Ли, связанной с картановской (максимальной коммутативной)

подгруппой, рассмотрим также случай максимального тора $T^n \subset G$:

$$T^k \stackrel{i}{\subset} SO(2k),$$

$$T^k \stackrel{i}{\subset} SO(2k+1),$$

$$T^k \stackrel{i}{\subset} U(k),$$

$$T^{k+1} \stackrel{i}{\subset} SU(k),$$

$$T^k \stackrel{i}{\subset} Sp(k).$$

Для $G_n = T^n$ мы имеем согласно результатам § 7 (выше):

$$BG_n = BT^n = \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty \text{ и } H^*(BT^n; \mathbb{Q}) =$$

$$= \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n], \quad t_i \in H^2(BT^n; \mathbb{Z}).$$

Задача 6. Докажите, что отображение

$$H^*(BG; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(BT^n; \mathbb{Q})$$

не имеет ядра (моморфизм) и образ $\text{Im } i^*$ состоит в точности из многочленов, инвариантных относительно группы Вейля. Для $U(n)$ группа Вейля состоит из всех перестановок образующих t_i . Для $SO(2n)$ группа Вейля содержит также еще отражения пар $(t_i, t_j) \mapsto (-t_i, -t_j)$. Для $SO(2n+1)$ группа Вейля содержит также все отражения $t_i \mapsto -t_i$.

Для $Sp(n)$ группа Вейля такая же, как и для $SO(2n+1)$.

Итак, образ $\text{Im } i^* (H^*(BG; \mathbb{Q})) \subset H^*(BT^n; \mathbb{Q})$ имеет вид:

$$a) SO(2k), \quad i^*(p_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} t_{i_1}^2 \dots t_{i_q}^2, \quad i^*(\chi_k) = t_1 \dots t_k;$$

$$б) SO(2k+1), \quad i^*(p_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} t_{i_1}^2 \dots t_{i_q}^2;$$

$$в) U(k), \quad i^*(c_j) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1} \dots t_{i_j}, \quad c_k = \chi_k;$$

$$г) Sp(k), \quad i^*(\gamma_j) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1}^2 \dots t_{i_j}^2.$$

Сравните эти формулы с [1], ч. II, § 25, где выбирался базис «полиномов Ньютона»: $\sum t_i^m = \bar{c}_m$.

Задача 7. Выведите формулы связи между классами c_i и $\bar{c}_m$. Найдите формулы для классов $p_j(r\xi)$ для овещствления U -расслоения ξ через классы $c_q(\xi)$.

Задача 8. Выведите приведенные факты о когомологиях $H^*(BG; \mathbb{Q})$ из спектральных последовательностей, подобрав нужные расслоения.

Задача 9. Докажите, что для комплекса X размерности $< N$ гомотопические классы отображений $[X, BG_n]$ — или классы

эквивалентности «стабильных» векторных расслоений со слоем $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$ — кватернионы) — образуют абелевы группы, так как BG — это H -пространство ($N = n$ для O, SO ; $N = 2n$ для U, SU ; $N = 4n$ для Sp). Сложение отображений $X \rightarrow BG$ порождается умножением ψ в BG (или прямой суммой расслоений — см. выше).

Докажите равенства

$$[X, BG_n] \otimes \mathbb{Q} \approx \text{Hom}(H^*(BG_n; \mathbb{Q}), H^*(X; \mathbb{Q}))$$

(имеются в виду гомоморфизмы колец) или, что то же самое: с точностью до элементов конечного порядка в группе $[X, BG_n]$ векторные расслоения полностью определяются характеристическими классами.

Прямая сумма расслоений определяется блочным вложением (аналогично для O, SO, SU, Sp):

$$U(m) \times U(n) \subset U(m+n).$$

При этом максимальные торы прямо перемножаются. Наборы образующих $t_1, \dots, t_m \in H^2(BT^m; \mathbb{Q})$ для $U(m)$ и $t'_1, \dots, t'_n \in H^2(BT^n; \mathbb{Q})$ для $U(n)$ составляют набор образующих $t_1, \dots, t_{m+n} \in H^2(BT^{m+n}; \mathbb{Q})$ для группы $U(m+n)$. Здесь $t_i = t'_i$ для $1 \leq i \leq m$ и $t_{j+m} = t'_j$ для $1 \leq j \leq n$.

Разлагая элементарный симметрический полином $c_i(t_1, \dots, t_{m+n})$ через $c_j(t_1, \dots, t_m) = c'_j$ и $c'_q = c_q(t'_1, \dots, t'_n)$, мы получаем формулы сложения, указанные в § 9 без доказательства:

$$c_i = \sum_{j+q=i} c'_j c''_q.$$

Или, для величины $c(z) = \sum c_i z^i$, $c'(z) = \sum c'_j z^j$, $c''(z) = \sum c''_q z^q$, $c_0 = 1$, имеем:

$$c(z) = c'(z) c''(z). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь «характер Чженя» ($G = U(n)$):

$$ch \xi = \sum_{i=1}^n \exp(zt_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(zt_i)^m}{m!} \right).$$

Для суммы $\xi \oplus \eta$ мы имеем

$$ch(\xi + \eta) = ch \xi + ch \eta. \quad (2)$$

Задача 10. Выведите формально (2) из (1) и наоборот, не прибегая к образующим t_i в максимальном торе.

Тензорное произведение расслоений $\xi \otimes \eta$ определяется вложением (аналогично для O, SO)

$$U(m) \times U(n) \rightarrow U(mn).$$

При этом максимальные торы связаны более сложно: имеется отображение торов

$$T^m \times T^n \xrightarrow{\varphi} T^{mn}, \\ BT^m \times BT^n \xrightarrow{\varphi} BT^{mn}$$

такое, что

$$\varphi^*(t_{jk}) = t_j + t_k, \quad (3)$$

где

$$t_{jk} \in H^2(BT^{mn}; \mathbb{Q}), \quad t_j \in H^2(BT^m; \mathbb{Q}), \\ t_k \in H^2(BT^n; \mathbb{Q}).$$

Формула (3) немедленно следует из явной формулы для отображения φ на диагональных матрицах (проверьте!).

Из формулы (3) вытекает

$$ch(\xi \otimes \eta) = ch \xi \cdot ch \eta, \quad (4)$$

поскольку

$$ch \xi \cdot ch \eta = \left(\sum_{i=1}^m \exp(zt_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n \exp(zt'_j) \right) = \\ = \sum_{i,j} \exp[z(t_i + t'_j)] = \varphi^* \left(\sum_{i,j} \exp(zt_{ij}) \right).$$

Для комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ имеем (см. задачу в [1], ч. II, § 24)

$$\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta \quad (n+1 \text{ слагаемое}), \quad (5)$$

где $c_1(\eta) = t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, $\tau(\mathbb{C}P^n)$ — касательное расслоение. Из формулы (5) вместе с (1) получаем

$$c(z) = (1 + zt)^{n+1} = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \\ p(z) = (1 - z^2 t^2)^{n+1} = 1 + p_1 z^2 + \dots + p_n z^{2n} + \dots \quad (6)$$

Здесь $t_1 = t_2 = \dots = t_{n+1} = t$ для расслоения $\tau \oplus 1$ и $p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau})$; по определению классов $p_i(\gamma) = (-1)^i c_{2i}(c\gamma)$; однако для $\gamma = r\xi$ имеем $c\gamma = cr\xi = \xi \oplus \bar{\xi}$ (см. [1], ч. II, § 24). Так как $c_i(\xi) = (-1)^i c_i(\bar{\xi})$, мы получаем:

$$p_1(\eta) = -c_2(\eta \oplus \bar{\eta}) = t^2, \quad p_i(\eta) = 0, \quad i > 1.$$

Отсюда следует

$$p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau}), \\ (1 + \sum p_i(\tau) z^{2i}) = (1 - z^2 t^2)^{n+1} = p(\mathbb{C}P^n). \quad (7)$$

Задача 11. Найдите характер Чженя симметрических степеней $S^i \xi$ и внешних степеней $\Lambda^i \xi$ U -расслоения ξ .

Задача 12. Найдите классы и характер Чженя для прямых произведений $\mathbb{C}P^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{n_s}$.

Задача 13. Исследуйте класс c_1 для многообразий X_k^{n-1} , заданных в $\mathbb{C}P^n$ одним алгебраическим (неособым) уравнением степени k . Докажите, что условие $c_1(X_k^{n-1}) = 0$ равносильно $k = n + 1$.

Задача 14. Найдите эйлерову характеристику $\chi(X_k^{n-1})$ и число $(c_1^{n-1}, [X_k^{n-1}])$.

Задача 15. Исследуйте случай $k = 4$, $k = 3$. Найдите гомологии X_4^2 .

Задача 16. Докажите, что гиперповерхности, заданные неособым уравнением в $\mathbb{C}P^n$, односвязны.

V. Классификация операций Стиррода в малых размерностях.

Мы попытаемся продемонстрировать метод вычисления гомотопических групп сфер, опирающийся на факт существования спектральной последовательности с ее формальными свойствами (см. теорему Лере), существование и формальные свойства операций Стиррода Sq^i и St_p^i , а также комплексов Эйленберга—Маклейна $K(\pi, n)$ для $\pi = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ (и тем самым для всех абелевых групп с конечным числом образующих). Для этой цели необходимо сначала вычислить все когомологические операции $\text{mod } p$. Построим комплекс $K = K(\pi, n)$ для любой абелевой группы по следующей схеме:

- а) имеется всего одна клетка $\sigma^0 \in K(\pi, n)$;
- б) нет клеток размерностей i , где $1 \leq i \leq n - 1$;
- в) клетки σ_j^n находятся во взаимно однозначном соответствии с образующими $x_j \in \pi$;
- г) клетки σ_k^{n+1} приклеиваются к уже построенному остову K^n согласно соотношениям γ_k на образующие x_j группы π ,

$$K^{n+1} = \left(\bigcup_k \sigma_k^{n+1} \right) \bigcup_{\gamma_k} K^n,$$

$\gamma_k = \left\{ \sum_j \lambda_{jk} x_j = 0, \lambda_{jk} \text{ — целые числа} \right\}$, $\gamma_k: \partial \sigma_k^{n+1} \rightarrow K^n$. Для остова K^{n+1} мы получаем

$$\pi_j(K^{n+1}) = 0, \quad j < n,$$

$$\pi_n(K^{n+1}) = \pi.$$

Выберем какой-либо базис образующих элементов $\alpha_j \in \pi_{n+1}(K^{n+1})$ и совершим приклейку клетки (см. § 4)

$$\left(\bigcup_j \sigma_j^{n+2} \right) \bigcup_{\alpha_j} K^{n+1} = K^{n+2},$$

$$\alpha_j: \partial \sigma_j^{n+2} \rightarrow K^{n+1}.$$

Мы получим остов K^{n+2} . Из общих теорем клеточной аппроксимации мы имеем, согласно § 4:

$$\pi_j(K^{n+2}) = \pi_j(K^{n+1}), \quad j \leq n,$$

$$0 = \pi_{n+1}(K^{n+2}) = \pi_{n+1}(K^{n+1})/(\alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

Итерируя эту конструкцию, мы «убиваем» группы $\pi_{n+2}(K^{n+2})$, переходя к K^{n+3} , затем убиваем $\pi_{n+3}(K^{n+3})$, переходя к K^{n+4} , и т. д. В пределе $n + q \rightarrow \infty$ мы получим бесконечный клеточный комплекс $K(\pi, n)$.

Однако само построение $K(\pi, n)$ для нас не важно — важно только, что этот комплекс существует. Мы знаем следующее:

а) $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[t]$, $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p)$ для всех $p \geq 2$.

б) $K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_{p^h} = \lim_{N \rightarrow \infty} L_{p^h}^{2N+1}(1, 1, \dots, 1)$. Мы имеем расслоение (см. § 4)

$$L_{p^h}^{2N+1}(1, 1, \dots, 1) \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^N, \quad (8)$$

которое получается из обобщенного расслоения Хопфа ([1], ч. II, § 2)

$$S^{2N+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^N$$

факторизацией сферы $S^{2N+1} = \{z_0, \dots, z_N, \sum |z_i|^2 = 1\}$ по группе $\mathbb{Z}_{p^h}: (z_0, \dots, z_N) \mapsto (\exp[2\pi i/p^h] z_0, \dots, \exp[2\pi i/p^h] z_N)$. Вычисляя коомологии расслоения (8) из спектральной последовательности над $\mathbb{Z}$, мы имеем

1	u	0	uv	0	uv^2	0	$d_2: u \rightarrow p^h v, v \rightarrow 0,$
							$uv \rightarrow p^h v^2,$
0	1	0	v	0	v^2	0	$\dots \dots \dots$
							$uv^k \rightarrow p^h v^{k+1}.$
	0	1	2	3	4	...	

Поэтому

$$H^{2q}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^h}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

$$H^{2q+1}(K; \mathbb{Z}) = 0, \quad q > 0.$$

Над полем $\mathbb{Z}_p$ мы имеем:

$$d_2 u = 0, \quad d_2 v = 0, \quad E_2^{p, q} = E_r^{p, q} = E_\infty^{p, q}.$$

Мы имеем следующее кольцо:

$$H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1), \mathbb{Z}_p) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}_p[v]$$

— свободная алгебра (так как присоединенная алгебра E_∞^* свободна, то и сама $H^*(K, \mathbb{Z}_p)$ свободна). Из информации о целочисленных коомологиях мы имеем в $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$:

$$\delta_j(uv^k) = 0, \quad j < h, \quad \delta_q(v^k) = 0 \quad (\text{для всех } q).$$

$$\delta_h u = v, \quad \delta_h(uv^k) = v^{k+1}.$$

Кстати, отметим свойство

$$\delta_h(uv) = (\delta_h u)v \pm u(\delta_h v),$$

если оба $\delta_h(u)$, $\delta_h(v)$ определены. Это свойство немедленно вытекает из определения δ_h через граничный оператор на целочисленных коцепях.

Задача 17. Используя приведенную информацию, докажите, что $H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h}, n), \mathbb{Z}_q) \cong 0$, если p и q взаимно просты.

В спектральной последовательности любого расслоения с односвязной базой (см. § 8) в коомологиях мы имеем

$$E_2^{q, 0} = H^q(B), \quad E_2^{0, q} = H^q(F).$$

Имеем отображения $p: E \rightarrow B$, $i: F \rightarrow E$,

$$p^*: H^q(B) \rightarrow H^q(E, F) \text{ — «проекция»,}$$

$$i^*: H^q(E) \rightarrow H^q(F) \text{ — «ограничение»}.$$

Можно определить многозначное отображение — трансгрессию

$$H^q(F) \supset A^q \xrightarrow{\tau = (p^*)^{-1} \delta} H^{q+1}(B),$$

где $\delta: H^q(F) \rightarrow H^{q+1}(E, F)$ и

$$A^q = \delta^{-1}(p^* H^{q+1}(B) \cap \text{Im } \delta)$$

— область определения многозначного и не всюду определенного гомоморфизма τ . Очевидно, $A^q \supset \text{Im } i^*$ и при этом $\tau(\text{Im } i^*) = 0$. Определение трансгрессии через дифференциалы d_r таково:

$$A^q = \bigcap_{r \leq q} \text{Ker } d_r = E_{q+1}^{0, q} \subset H^q(F),$$

$$\tau = d_{q+1} \text{ на группе } A^q.$$

Так как операции Sq^i , St_p^i , δ , δ_h все коммутируют с непрерывными отображениями $p^*0_* = 0p^*$, а также с гомоморфизмом $\mathbb{I}\delta$: $H^q(F) \rightarrow H^{q+1}(E, F)$ в $\mathbb{Z}_p$ -когомологиях, мы имеем: все стабильные операции δ , δ_h , Sq^i , St_p^i коммутируют с трансгрессией $\tau\theta = \theta\tau$. Это означает, что для элементов $x \in A^q$, где трансгрессия определена («трансгрессивных» элементов), их образы $\theta x \in A^{q+1}$ также находятся в области определения трансгрессии («трансгрессивны»), и при этом верно равенство:

$$\begin{aligned} \theta\tau &= \tau\theta, \\ \theta &= \delta, \delta_h, Sq^i, St_p^i. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислим теперь некоторые «стабильные» когомологии комплексов $K(Z, n)$ и $K(\mathbb{Z}_p^n, n)$.

Случай $K = K(Z, n)$, $p = 2$. Для $n = 1, 2$ ответ известен, $H^*(K(Z, 2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u]$, $\deg u = 2$. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $E \rightarrow K(Z, 3)$, $F = \Omega(B) = K(Z, 2)$. В члене $E_2^{p,q}$ мы имеем $E_2^{0,q} = H^*(F; \mathbb{Z}_2)$. Мы знаем, что элемент $u \in H^2(F; \mathbb{Z}_2)$ трансгрессивен по тривиальным причинам, и при этом $\tau(u) = d_3(u) = v \in H^3(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. В силу свойств операций Sq^i (см. п. I этого параграфа и свойства трансгрессии) элементы $Sq^2(u) = u^2$, $Sq^4Sq^2(u) = (u^2)^2 = u^4$ трансгрессивны, и при этом

$$\begin{aligned} \tau(u^4) &= Sq^2(v) \in H^5(B; \mathbb{Z}_2), \\ \tau(u^8) &= Sq^4Sq^2(v) \in H^9(B; \mathbb{Z}_2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда немедленно следует, что алгебра $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ имеет вид алгебры многочленов от образующих $\tau(u^{2^i})$:

$$\begin{aligned} H^*(B; \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2[v, Sq^2v, Sq^4Sq^2v, \dots], \\ B_3 = B &= K(Z, 3), \quad \delta_h v = 0, \quad Sq^2v = v^2. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к следующим расслоениям:

$$E \rightarrow B_n, \quad F = K(Z, n-1), \quad B_n = K(Z, n).$$

При переходе от $F = K(Z, 3)$ к $B = B_4 = K(Z, 4)$ мы аналогично получим старые трансгрессивные элементы в $E_2^{0,q} = H^q(F; \mathbb{Z}_2)$:

$$v, Sq^2v, \dots, Sq^{2^i}Sq^{2^{i-1}} \dots Sq^2v,$$

а также новые, получающиеся из старых возведением в степень вида 2^i : $v^2 = Sq^2v$, $v^4 = Sq^4Sq^2v$, ... Итерируя эту процедуру,

мы получим первые когомологии $H^{n+q}(K(Z, n); \mathbb{Z}_2)$ для $q < n$ (указаны образующие)

$q = 0$	1	2	3	4
u	0	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u
$q = 5$	6	7	8	9
Sq^5u	Sq^6u	Sq^7u	Sq^8u	Sq^9u
	Sq^4Sq^2u	Sq^6Sq^2u	Sq^8Sq^2u	Sq^7Sq^2u Sq^6Sq^3u

Для $K = K(\mathbb{Z}_2, n)$ рассуждение полностью аналогично, но начинается с расслоения

$$E \rightarrow B = K(\mathbb{Z}_2, 2), \quad F = K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty.$$

Здесь трансгрессивны элементы

$$u \in H^1(F; \mathbb{Z}_2), \quad Sq^1u = \delta_*u = u^2,$$

$$Sq^2Sq^1u = (u^2)^2, \dots, Sq^{2^i}Sq^{2^{i-1}} \dots Sq^2Sq^1u = ((u^2)^2 \dots)^2.$$

Итерируя рассуждение, получим таблицу «стабильных» групп $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$

$q =$	0	1	2	3	4	5	6
u	Sq^1u	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u	Sq^5u	Sq^6u	Sq^7u
			Sq^2Sq^1u	Sq^3Sq^1u	Sq^4Sq^1u	Sq^5Sq^1u	Sq^6Sq^1u

З а м е ч а н и е. В дальнейших вычислениях мы используем только группы $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_2)$ при малых $q < 7$, поэтому доказательства деталей приведенных утверждений нам не нужны: при малых $q < 7$ все эти утверждения проверяются элементарным рассмотрением спектральных последовательностей (см. выше).

Укажем также $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2^n, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$:

$q = 0$	1	2	3	4
u	$\delta_h u$	$Sq^2 u$	$Sq^3 u$ $Sq^2 \delta_h u$	$Sq^4 u$ $Sq^3 \delta_h u$

Мы не приводим полностью аналогичное рассмотрение случая $K = K(\mathbb{Z}_p^n, n)$ и коомологий $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$. Ответ таков:

Для $K = K(\mathbb{Z}_p, n)$ имеем $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q = 0$	1	2	...	$2p - 2$	$2p - 1$
u	0	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$

Для $K = K(\mathbb{Z}_p^n, n)$ имеем $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q = 0$	1	2	...	$2p - 2$	$2p - 1$
u	$\delta_h u$	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$ $St_p^1 \delta_h u$

(для $h = 1$ имеем $\delta_1 = \delta_*$).

Итак, мы видим, что все «стабильные» коомологические операции θ в указанных размерностях сводятся к итерациям квадратов и степеней Sq^i , St_p^i , δ_* , где

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

и коммутируют с кограничным гомоморфизмом. Что же касается стабильных операций вида

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

то все они сводятся к операциям St_p^i , Sq^i , δ_* (после приведения по модулю p) и кроме того — операциям того же вида, примененным к элементу $\delta_h u$.

Стабильная операция $\theta: H^n(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(X; \mathbb{Z}_p)$ имеет, как говорят, «размерность» q :

$$\deg \theta = q.$$

Все стабильные операции образуют градуированную «алгебру Стиррода» A_p

$$A_p = A = \sum_{q=0} A^q,$$

где A^0 — скаляры и A^q состоит из всех операций степени q .

Из наших результатов (см. таблицы выше) мы получаем базис алгебры $A_p = A$ в малых размерностях q :

$$p = 2$$

$q = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1	Sq^1	Sq^2	Sq^3 $Sq^2 Sq^1$	Sq^4 $Sq^3 Sq^1$	Sq^5 $Sq^4 Sq^1$	Sq^6 $Sq^5 Sq^1$ $Sq^4 Sq^2$	Sq^7 $Sq^6 Sq^1$ $Sq^5 Sq^2$ $Sq^4 Sq^3 Sq^1$

$$p > 2$$

$q = 0$	1	2	...	$2p - 2$	$2p - 1$
1	δ_*	0	0	St_p^1	$\delta_* St_p^1$ $St_p^1 \delta_*$

Обратим внимание на любопытное следствие полученных результатов, которое уже весьма существенно для $p = 2$: базис операций меньше, чем всевозможные произведения (суперпозиции) операций Стиррода $Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_k}$. Это означает, что между произведениями операций Sq^i имеются нетривиальные соотношения. Идея нахождения этих соотношений такова: рассмотрим произведения $RP_1^\infty \times \dots \times RP_n^\infty$ и элемент

$$u = t_1 \dots t_n \in H^n(RP_1^\infty \times \dots \times RP_n^\infty; \mathbb{Z}_2),$$

$$0 \neq t_i \in H^1(RP_i^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Для элемента t_i имеем $Sq^1 t_i = t_i$, $Sq^0 t_i = t_i$, $Sq^j t_i = 0$ при $j \neq 0, 1$. Отсюда вытекает, что любую операцию вида $Sq^{i_1} \dots Sq^{i_k}(u)$, можно вычислить, исходя лишь из формальных свойств операций Стиррода $Sq^i(xy) = \sum_{j+k=i} Sq^j(x) Sq^k(y)$. При этом

окажется, что все базисные операции $\theta \in H^{q+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ при $q < n$ нетривиально действуют на элемент u : $\theta(u) \neq 0$, если $\theta \neq 0$.

Мы проверим это напрямик для $q \leq 9$:

$$q=1: Sq^1 u = \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) u;$$

$$q=2: Sq^2 u = \left(\sum_{i < j} t_i t_j \right) u;$$

$$q=3: Sq^3 u = \left(\sum_{i < j < k} t_i t_j t_k \right) u;$$

$$Sq^2 Sq^1 u = \left(\sum_i t_i \right) \left(\sum_{i < j} t_i t_j \right) u = \sigma_1 \sigma_2 u.$$

(Пусть $\sigma_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1} \dots t_{i_j}$ — элементарный симметрический многочлен.)

$$q=4: Sq^4 u = \left(\sum_{i < j < k < l} t_i t_j t_k t_l \right) u = \sigma_4 u,$$

$$Sq^3 Sq^1 u = \sigma_3 \sigma_1 u;$$

$$q=5: Sq^5 u = \sigma_5 u, \quad Sq^4 Sq^1 u = \sigma_4 \sigma_1 u;$$

$$q=6: Sq^6 u = \sigma_6 u, \quad Sq^5 Sq^1 u = \sigma_5 \sigma_1 u,$$

$$Sq^2 u = \sigma_1 \sigma_2 u;$$

(11)

$$q=7: Sq^7 u = \sigma_7 u, \quad Sq^6 Sq^1 u = \sigma_6 \sigma_1 u;$$

$$Sq^3 Sq^2 u = \sigma_3 \sigma_2 u, \quad Sq^4 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 u;$$

$$q=8: Sq^8 u = \sigma_8 u, \quad Sq^7 Sq^1 u = \sigma_7 \sigma_1 u,$$

$$Sq^6 Sq^2 u = \sigma_6 \sigma_2 u; \quad Sq^5 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_5 \sigma_2 \sigma_1 u.$$

Как видно из приведенной таблицы, все базисные операции $\theta \in A^q = A_2^q$ при $q \leq 8$ линейно независимо действуют на элемент u :

$$\theta(u) = 0 \leftrightarrow \theta = 0.$$

Мы видим, что для базиса в алгебре Стиррода $A = A_2$ достаточно произведений вида

$$Sq^{i_k} \dots Sq^{i_1}, \quad (12)$$

где $i_k \geq 2i_{k-1}$, $i_{k-1} \geq 2i_{k-2}$, ..., $i_2 \geq 2i_1$.

Все произведения вида (12) линейно независимы и дают полный аддитивный базис в алгебре A_2 .

Будем искать соотношения вида

$$Sq^i Sq^j = \sum_{a \geq 2b} \lambda_{a,b}^{i,j} Sq^a Sq^b,$$

где $a \geq 2b$, $0 < i < 2j$.

Задача 18. Найдите коэффициенты $\lambda_{a,b}^{i,j}$ для всех q .

Для $q \leq 8$ прямым вычислением из таблицы (11) получаем $\lambda_{a,b}^{i,j} = \delta_{a+b}^{i,j} C_{i-2b}^{i-2b-1}$ (это верно всегда). Итак, мы имеем таблицу соотношений

$$Sq^1 Sq^1 = \delta_2^2 = 0,$$

$$Sq^1 Sq^2 = Sq^3,$$

$$Sq^1 Sq^3 = 0, \quad Sq^1 Sq^{2q} = Sq^{2q+1},$$

(13)

$$Sq^2 Sq^2 = Sq^4 Sq^1, \quad Sq^2 Sq^3 = Sq^3 Sq^1,$$

$$Sq^3 Sq^3 = Sq^3 Sq^1.$$

VI. Вычисление первых нетривиальных стабильных гомотопических групп сфер.

Рассмотрим отображение $S^n \xrightarrow{f} K(\mathbb{Z}, n) = K$. Превратим это отображение в расслоение, не меняя гомотопических типов; здесь f^* — изоморфизм между $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ и $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Для слоя $F = F_1$ получим из точной последовательности: $\pi_i(F) = 0$, $i \leq n$, $\pi_i(F) = \pi_i(S^n)$, $i \geq n+1$. В размерности $n+q < 2n$ спектральная последовательность расслоения сведется к точной последовательности (τ — это трансгрессия)

$$0 \rightarrow H^{n+q}(F) \xrightarrow{\tau} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0 \quad \text{при } q > 0,$$

так как $\sum_{p+q=m} E_2^{p,q} = E_2^{m,0} + E_2^{0,m}$ для $p+q < 2n$ и $H^{n+q}(S^n) =$

$$= 0 \quad \text{при } q > 0, \quad H^n(S^n) \approx_{f^*} H^n(K).$$

Итак, имеем:

$$\boxed{q > 0}$$

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p) \approx_{\tau} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p),$$

где $\tau Sq^i = Sq^i \tau$,

$$\tau \delta_h^i = \delta_h^i \tau, \quad \tau St_p^i = St_p^i \tau, \quad H^j(F; \mathbb{Z}_p) = 0, \quad j \leq n.$$

Из таблицы групп $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$ следует результат для $H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p)$:

$p > 2$				
$q=0$	1	...	$2p-3$	$2p-2$
0	0	0	v	$\delta \cdot v$

Вывод. Для всех $p > 2$ в группах $\pi_{n+q}(F) = \pi_{n+q}(S^n)$ при $0 < q < 2p - 3 < n$ нет нетривиальных p -компонент; группа

$$\pi_{n+2p-3}^{(p)}(F) = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n) \neq 0,$$

так как $\delta_{2p} \neq 0$; в размерности $2p - 3$ мы имеем

$$H_{n+2p-3}^{(p)}(F; Z) = Z_p = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n).$$

Для $p = 2$ это рассуждение действует так же, причем $\delta_{2p} = Sq^1(2p - 3 = 1 \text{ для } p = 2)$:

$$\pi_{n+1}^{(2)}(S^n) = Z_2 = \pi_{n+1}(S^1), \quad \pi_{n+1}^{(p)} = 0, \quad p > 2.$$

Получаем когомологии $H^*(F; Z_2)$ вместе с действием операций Стиррода:

$$\boxed{p=2}$$

$$H^{n+q}(F; Z_2) = H^{n+q+1}(K(Z_2, n); Z_2) = A^{q+1}.$$

$q =$	1	2	3	4	5	6
	v	$Sq^1 v$	w $Sq^2 v = 0$	$Sq^1 w =$ $= Sq^2 Sq^1 v$	$Sq^1 v$ $Sq^2 w$	$Sq^2 w$ $Sq^4 v$

(14)

Здесь $\tau(v) = Sq^2 u$, $\tau(w) = Sq^4 u$. В силу соотношения $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$ имеем вместе с условием $Sq^4 u = 0$:

$$Sq^2 v = 0. \quad (15)$$

Так как $Sq^2 Sq^1 = Sq^3 Sq^1 + Sq^3$, верно соотношение

$$Sq^2 w = Sq^6 u. \quad (16)$$

Из равенства $Sq^2 Sq^3 = Sq^5 + Sq^4 Sq^1$ вытекает

$$Sq^1 w = Sq^3 Sq^1 v. \quad (17)$$

Перейдем к следующему шагу. Рассмотрим отображение (расслоение)

$$F_1 = F \xrightarrow{f_1} K(Z_2, n+1),$$

где $f_1: \pi_{n+1}(F) \rightarrow \pi_{n+1}(K(Z_2, n+1))$ есть изоморфизм. Мы получаем

$$\pi_j(F_2) = 0, \quad j \leq n+1,$$

$$\pi_j(F_2) = \pi_j(F_1) = \pi_j(S^n), \quad j > n+1.$$

Спектральную последовательность и трангрессию τ удобно в стабильном случае изобразить в виде точной последовательности

$$H^{n+q}(F; Z_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_2; Z_2) \xrightarrow{\tau} A^q \xrightarrow{i^*} H^{n+q+1}(F; Z_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q+1}(F_2; Z_2),$$

причем i^* и τ оба коммутируют с операциями Стиррода, $A^q = H^{n+q+1}(K(Z_2, n+1); Z_2)$. При отображении f^* фундаментальный класс $u \in H^{n+1}(K(Z_2, n+1), Z_2)$ переходит в v ,

$$f^*(u) = v.$$

Поэтому образ f^*A состоит из операций Стиррода, примененных к элементу v

$$f^*A^q = A^q(v).$$

Вместе с таблицей $H^*(F; Z_2)$ (см. выше) мы получаем таблицу гомологий $H^*(F_2; Z_2)$

$q =$	2	3	4	5	6
	x	$\tilde{w}$ $Sq^1 x$	$Sq^1 \tilde{w} = 0$ $Sq^2 x = \delta_2 w$	$Sq^2 \tilde{w}$ $Sq^3 x = 0$	$Sq^3 \tilde{w}$ $Sq^4 x$

(18)

Здесь $\tilde{w} = i^*(w)$, и $x = \tau^{-1}(Sq^2 u)$, так как мы имели $Sq^2 v = 0$ и $v = f^*(u)$, то $f^*(Sq^2 u) = 0$. Поэтому $Sq^2 u = \tau(x)$, $x \in H^{n+2}(F_2; Z_2)$. Далее $Sq^2(Sq^2 u) = Sq^3 Sq^1 u \neq 0$. Поэтому

$$f^*(Sq^2 Sq^2 u) = \tau(Sq^2 x), \quad Sq^2 x \in H^{n+4}(F_2; Z_2).$$

Соотношение $Sq^1 \tilde{w} = 0$ возникло в таблице (18) вследствие соотношения $Sq^1 w = Sq^2 Sq^1 v$ в таблице (14), так как $Sq^2 Sq^1 v = f^*(Sq^2 Sq^1 u)$.

Пусть $a = Sq^2 Sq^1 v = Sq^1 w = \delta_1 w$, $b = Sq^2 x = \tau^{-1}(Sq^2 Sq^2 u) = \tau^{-1} Sq^1(Sq^2 Sq^1 u)$. Имеет место следующее общее утверждение:

Лемма 2. Если $a = f^*(\bar{a}) = \delta_n w$ и $b = \tau^{-1} \delta_n(\bar{a})$, то элементы b , $\tilde{w} = i^* w$ в $H^*(F_2; Z_2)$ таковы, что $b = \delta_{n+1} \tilde{w}$.

Доказательство леммы следует из элементарных свойств кограничного гомоморфизма в комплексе цепей $C^*(E; Z)$. Мы оставляем детали читателю.

Опираясь на лемму 2, мы получаем: $Sq^1 = \delta_* = \delta_1$, $a = Sq^1 w$, $b = Sq^2 x$, $Sq^2 x = \delta_2 \tilde{w}$. Поэтому, в частности, имеем $Sq^2 x = \delta_* \delta_2 \tilde{w} = 0$.

Вывод. Так как $Sq^1 x = \delta_1 x \neq 0$, получаем результат $(\pi_{n+2}(F_2) = H_{n+2}(F_2; Z))$:

$$\pi_{n+2}(S^n) = \pi_{n+2}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+2}^{(2)}(F_2) = Z_2.$$

Перейдем теперь к третьему шагу. Рассмотрим отображение (расслоение)

$$F_2 \xrightarrow{f} K(\mathbb{Z}_2, n+2), \text{ слой } F_2.$$

Отображение $f_*|_{\pi_{n+2}(F_2)}$ есть изоморфизм. Для F_3 из точной последовательности гомотопических групп вытекает:

$$\pi_j(F_3) = 0, \quad j \leq n+2,$$

$$\pi_j(F_3) = \pi_j(F_2) = \pi_j(S^n), \quad j \geq n+3.$$

В стабильном случае $q < n$ спектральная последовательность опять сведется к точной

$$H^{n+q}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j^*} A^{q-1} \xrightarrow{i^*} H^{n+q+1}(F_3; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*},$$

где $A^{q-1} = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$.

По определению $x = f^*(u)$, где u — фундаментальный класс в когомологиях $H^{n+2}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, получаем

$$j^*(A^{q-1}) = A^{q-1}(x).$$

Для когомологий $H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2)$ получим таблицу

$q =$	2	3	4	5
	0	$\tilde{\omega}$	$\delta_3 \tilde{\omega}$	$Sq^2 \tilde{\omega}$

Здесь $\tilde{\omega} = i^* \tilde{\omega}$ и $\delta_3 \tilde{\omega} = \tau^{-1} \delta_2 \tilde{\omega}$ согласно лемме 2 (см. выше).

Вывод. Группа

$$\pi_{n+3}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+3}^{(2)}(F_3) = H_{n+3}^{(2)}(F_3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8,$$

так как $\delta_3 \tilde{\omega} \neq 0$. Так как $\pi_{n+3}^{(3)}(S^n) = \mathbb{Z}_3$, $\pi_{n+3}^{(p)}(S^n) = 0$ при $p > 3$, окончательно получаем

Теорема 6. Стабильные гомотопические группы $\pi_{n+q}(S^n)$ при $q < n-1$ имеют следующие значения (для $q \leq 2$ см. также [1], ч. II, § 23):

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad \pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_2.$$

Задача 19. Вычислите группы $\pi_{n+q}(S^n)$ для $q \leq 9$. При $q \geq 10$ возникают более серьезные затруднения. Преодоление этих затруднений возможно. Это позволяет весьма трудоемко вычислить все группы $\pi_{n+q}(S^n)$ для $q \leq 30$ (примерно). Однако общий ответ для всех q вряд ли возможен в хорошем виде, хотя в настоящее время в литературе можно найти много качественных сведений о высших гомотопических группах.

VII. Стабильные гомотопические классы отображений клеточных комплексов.

Нередко возникает такая ситуация: задан $(n-1)$ -связный клеточный комплекс K . Пусть комплекс K не имеет клеток размерностей $1 \leq i \leq n-1$; говорят, что требуется вычислить стабильные гомотопические классы отображений комплекса X в K , если $\dim X < 2n-1$.

Другой вопрос: исследовать препятствие $\alpha(f)$ к продолжению отображения $f: X^{n+q} \rightarrow K$ на $(n+q+1)$ -мерный остов при $q < n-2$. Мы уже видели, что для расслоений $E \xrightarrow{p} B$, где слой F и база B $(n-1)$ -связны, спектральная последовательность в гомотопиях до размерности $2n-2$ сводится к точной

$$H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{j^*} H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E).$$

Мы видим, что сложность теории гомотопий косого произведения в «стабильных» размерностях такая же, как и для групп гомотопий. Можно сказать, что в размерностях $k \leq 2n-2$ теория гомотопий расслоения $E \xrightarrow{p} B$ такая же, как и пары (E, F) , причем $B \sim E/F$, так как нетривиальные клетки в E , не лежащие в B или F , впервые могут появиться в размерности $2n$ (произведение клеток базы и слоя). Итак, в стабильных размерностях все упрощается.

Лемма 3. Стабильные гомотопические классы отображений образуют абелеву группу $[X, K]$.

Доказательство. Рассмотрим два отображения f, g

$$f: X \rightarrow K, \quad g: X \rightarrow K,$$

и их прямое произведение

$$f \times g: X \rightarrow K \times K,$$

где $[f \times g](x) = (f(x), g(x))$.

Комплекс $K \times K$ $(n-1)$ -связен; он не имеет клеток размерностей $1 \leq i \leq n-1$ и образ $(f \times g)(X)$ лежит при клеточном отображении в остове размерности $k \leq \dim X$. При $k \leq 2n-2$ образ $(f \times g)(X)$ попадает в букет $K \vee K \subset K \times K$, так как «лишние» клетки в $K \times K$, не лежащие в $K \vee K$, появляются в размерности $2n$. Это же относится к образу в $K \times K$ любой гомотопии отображений: она лежит в $K \vee K$. Имеется очевидное отображение «складки»

$$\kappa: K \vee K \rightarrow K,$$

тождественное на каждом слагаемом.

Определим сумму гомотопических классов

$$f, g \in [X, K], \quad f + g = \kappa(f \times g),$$

считая f и g клеточными и $\dim X \leq 2n - 2$. Групповые свойства и абелевость этой операции очевидны (проверьте).

Лемма 4. Пусть задано стабильное отображение $f: X^{n+q} \rightarrow K$ и препятствие к продолжению отображения $\alpha(f) \in C^{n+q+1}(X^{n+q+1}, \pi_{n+q}(K))$ (см. § 9) на остов X^{n+q+1} . Тогда препятствие $\alpha(f)$ аддитивно зависит от элемента $f \in [X, K]$ и $\alpha(\lambda f) = \lambda \alpha(f)$.

Доказательство. Препятствие $\alpha(f)$ имеет значение на σ^{n+q+1} , определяемое отображением

$$\partial \sigma^{n+q+1} = S^{n+q} \rightarrow K.$$

При сложении отображений $f + g = \kappa(f \times g)$ гомотопические классы отображений $\partial \sigma^{n+q+1} \rightarrow K$, порожденные f и g , также складываются, по определению сложения в группах π_i (здесь, в стабильной ситуации, заботиться о начальной точке и действии π_i не нужно).

Мы уже построили отображение $f: K \rightarrow \prod_{n_j \geq n}^{2n-1} K(D_j, n_j)$, порождающее изоморфизм Q -когомологий и групп гомотопий $\pi_i(K) \otimes Q$ до размерности $2n - 2$ — см. выше, п. III. Здесь группы D_j свободные абелевы.

Построим «обратное» отображение остова

$$g: \left(\prod_{n_j \geq n}^{2n-1} K(D_j, n_j) \right)^{2n-2} \rightarrow K,$$

так что $f_* g_* = \lambda \neq 0$ в Q -когомологиях и гомотопиях $\pi_i \otimes Q$ при $j < 2n - 2$, т. е. $f_* g_*(x) = \lambda x$, $g_* f_*(y) = \lambda y$. Будем строить такое «обратное» отображение g индукцией по остову. Сделаем индуктивную гипотезу, что возникающее препятствие к продолжению уже построенного отображения g_{n+q} с $(n+q)$ -мерного остова на $(n+q+1)$ -мерный остов является классом когомологий конечного порядка μ . После этого, пользуясь леммами 3 и 4, переходим к отображению $\mu \cdot g_{n+q}$ и, изменив его на $(n+q)$ -мерном остове, приходим к нулевому препятствию (см. § 9.) Продолжая отображение класса (μg_{n+q}) на остов размерности $n+q+1$, получим отображение g_{n+q+1} и т. д. В конечном счете мы приходим к отображению g . Докажем конечность порядка класса когомологий препятствия α на остове $n+q$ для отображения g_{n+q} . Остов $\left(\prod_{n_j \geq n} K(D_j, n_j) \right)^{2n-2}$ гомотопически эквивалентен остову букета $\bigvee_{n_j \geq n} (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Каждый комплекс $(K(D_j, n_j))^{2n-1}$ имеет элементы бесконечного порядка только в когомологиях первой нетривиальной размерности n_j согласно результатам п. V о рациональных когомологиях комплексов типа $K(\pi, n)$. При построении обратного отображения g_{n+q} мы строим все

отдельно на каждом слагаемом букете $\bigvee (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Поэтому мы встретим лишь препятствие конечного порядка.

Отсюда следует такое утверждение.

Теорема 7. Для любого комплекса X стабильные гомотопические классы отображений X в $(n-1)$ -связный комплекс K ($\dim X \leq 2n - 2$) образуют абелеву группу $[X, K]$, для которой имеет место равенство

$$[X, K] \otimes Q \approx \text{Hom}(H^*(K; Q) \rightarrow H^*(X, Q)).$$

Это означает следующее: с точностью до элементов конечного порядка гомотопический класс определяется гомоморфизмом Q -когомологий; при этом любой чисто алгебраический гомоморфизм $a^*: H^*(K; Z) \rightarrow H^*(X; Z)$ или $a_*: H_*(X; Z) \rightarrow H_*(K; Z)$ можно умножить на ненулевое число $\lambda \neq 0$, $a^* \rightarrow \lambda a^*$, $a_* \rightarrow \lambda a_*$, так что гомоморфизм λa^* (или λa_*) реализуется непрерывным отображением $f: X \rightarrow K$.

§ 11. Гомологии и фундаментальная группа

Пусть имеется неодносвязный комплекс (клеточный или даже симплициальный) K с фундаментальной группой $D = \pi_1(K)$. Рассмотрим универсальное накрытие

$$\hat{K} \rightarrow K,$$

где группа D свободно и дискретно действует на $\hat{K}$, переводя симплексы (клетки) друг в друга. Каждой клетке σ_v^i в K соответствует набор клеток

$$p^{-1}(\sigma_v^i) = \sigma_{1v}^i \cup \sigma_{2v}^i \cup \dots$$

в числе, равном числу элементов из $D = \pi_1(K)$. Группа D , действуя на $p^{-1}(\sigma_v^i)$, определяет перестановку клеток $\sigma_{\alpha v}^i$. Выберем в прообразе $p^{-1}(\sigma_v^i)$ одну клетку и обозначим ее через $\hat{\sigma}_v^i$.

Все клетки из $\hat{K}$ получатся в виде

$$\sigma_{\alpha v}^i = g(\hat{\sigma}_v^i), \quad g \in D = \pi_1(K),$$

причем все клетки $g(\hat{\sigma}_v^i)$ различны. Любая цепь в $\hat{K}$ имеет вид

$$a = \sum_{j \in J} \lambda_j g_j(\hat{\sigma}_v^i), \quad a \in C^i(\hat{K}), \quad (1)$$

где λ_j — целые числа.

Граничный оператор ∂ в $\hat{K}$ коммутирует с действием группы D на клетки и умножением на числа λ_j ; естественно ввести «группо-

считая f и g клеточными и $\dim X \leq 2n - 2$. Групповые свойства и абелевость этой операции очевидны (проверьте).

Лемма 4. Пусть задано стабильное отображение $f: X^{n+q} \rightarrow K$ и препятствие к продолжению отображения $\alpha(f) \in C^{n+q+1}(X^{n+q+1}, \pi_{n+q}(K))$ (см. § 9) на остов X^{n+q+1} . Тогда препятствие $\alpha(f)$ аддитивно зависит от элемента $f \in [X, K]$ и $\alpha(\lambda f) = \lambda \alpha(f)$.

Доказательство. Препятствие $\alpha(f)$ имеет значение на σ^{n+q+1} , определяемое отображением

$$\partial \sigma^{n+q+1} = S^{n+q} \rightarrow K.$$

При сложении отображений $f + g = \alpha(f, g)$ гомотопические классы отображений $\partial \sigma^{n+q+1} \rightarrow K$, порожденные f и g , также складываются, по определению сложения в группах π_j (здесь, в стабильной ситуации, заботиться о начальной точке и действии π_1 не нужно).

Мы уже построили отображение $f: K \rightarrow \prod_{n_j \geq n} K(D_j, n_j)$, порождающее изоморфизм Q -когомологий и групп гомотопий $\pi_j(K) \otimes Q$ до размерности $2n - 2$ — см. выше, п. III. Здесь группы D_j свободные абелевы.

Построим «обратное» отображение остова

$$g: \left(\prod_{n_j \geq n} K(D_j, n_j) \right)^{2n-2} \rightarrow K,$$

так что $f_* g_* = \lambda \neq 0$ в Q -когомологиях и гомотопиях $\pi_j \otimes Q$ при $j < 2n - 2$, т. е. $f_* g_*(x) = \lambda x$, $g_* f_*(y) = \lambda y$. Будем строить такое «обратное» отображение g индукцией по остову. Сделаем индуктивную гипотезу, что возникающее препятствие к продолжению уже построенного отображения g_{n+q} с $(n+q)$ -мерного остова на $(n+q+1)$ -мерный остов является классом когомологий конечного порядка μ . После этого, пользуясь леммами 3 и 4, переходим к отображению $\mu \cdot g_{n+q}$ и, изменив его на $(n+q)$ -мерном остове, приходим к нулевому препятствию (см. § 9.) Продолжая отображение класса (μg_{n+q}) на остов размерности $n+q+1$, получим отображение g_{n+q+1} и т. д. В конечном счете мы приходим к отображению g . Докажем конечность порядка класса когомологий препятствия α на остове $n+q$ для отображения g_{n+q} . Остов $\left(\prod_{n_j \geq n} K(D_j, n_j) \right)^{2n-2}$ гомотопически эквивалентен остову букета $\bigvee_{n_j \geq n} (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Каждый комплекс $(K(D_j, n_j))^{2n-1}$

имеет элементы бесконечного порядка только в когомологиях первой нетривиальной размерности n_j согласно результатам п. V о рациональных когомологиях комплексов типа $K(\pi, n)$. При построении обратного отображения g_{n+q} мы строим все

отдельно на каждом слагаемом букета $\bigvee_i (K(D_i, n_i))^{2n-2}$. Поэтому мы встретим лишь препятствие конечного порядка.

Отсюда следует такое утверждение.

Теорема 7. Для любого комплекса X стабильные гомотопические классы отображений X в $(n-1)$ -связный комплекс K ($\dim X \leq 2n - 2$) образуют абелеву группу $[X, K]$, для которой имеет место равенство

$$[X, K] \otimes Q \cong \text{Hom}(H^*(K; Q) \rightarrow H^*(X, Q)).$$

Это означает следующее: с точностью до элементов конечного порядка гомотопический класс определяется гомоморфизмом Q -когомологий; при этом любой чисто алгебраический гомоморфизм $a^*: H^*(K; Z) \rightarrow H^*(X; Z)$ или $a_*: H_*(X; Z) \rightarrow H_*(K; Z)$ можно умножить на ненулевое число $\lambda \neq 0$, $a^* \mapsto \lambda a^*$, $a_* \mapsto \lambda a_*$, так что гомоморфизм λa^* (или λa_*) реализуется непрерывным отображением $f: X \rightarrow K$.

§ 11. Гомологии и фундаментальная группа

Пусть имеется неолносвязный комплекс (клеточный или даже симплициальный) K с фундаментальной группой $D = \pi_1(K)$. Рассмотрим универсальное накрытие

$$\hat{K} \rightarrow K,$$

где группа D свободно и дискретно действует на $\hat{K}$, переводя симплексы (клетки) друг в друга. Каждой клетке σ_v^i в K соответствует набор клеток

$$p^{-1}(\sigma_v^i) = \sigma_{1v}^i \cup \sigma_{2v}^i \cup \dots$$

в числе, равном числу элементов из $D = \pi_1(K)$. Группа D , действуя на $p^{-1}(\sigma_v^i)$, определяет перестановку клеток $\sigma_{\alpha v}^i$. Выберем в прообразе $p^{-1}(\sigma_v^i)$ одну клетку и обозначим ее через $\hat{\sigma}_v^i$.

Все клетки из $\hat{K}$ получатся в виде

$$\sigma_{\alpha v}^i = g(\hat{\sigma}_v^i), \quad g \in D = \pi_1(K),$$

причем все клетки $g(\hat{\sigma}_v^i)$ различны. Любая цепь в $\hat{K}$ имеет вид

$$a = \sum_{j, v} \lambda_{jv} g_j(\hat{\sigma}_v^i), \quad a \in C^i(\hat{K}), \quad (1)$$

где λ_{jv} — целые числа.

Граничный оператор ∂ в $\hat{K}$ коммутирует с действием группы D на клетки и умножением на числа λ_j ; естественно ввести «группо-

вое кольцо $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$, элементами которого являются конечные суммы $\sum \lambda_j g_j$, λ_j — числа, $g_j \in D$ и умножение имеет вид

$$\left(\sum_i \lambda_i g_i\right) \left(\sum_k \lambda'_k g'_k\right) = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda'_k g_i g'_k.$$

Из вида цепей (1) в комплексе K видно, что это — цепи с коэффициентами в кольце Γ (возможно, некоммутативном, если группа D некоммутативна).

Гомоморфизм $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ в любое кольцо Γ' позволяет рассмотреть комплекс цепей с коэффициентами в Γ' для $\hat{K}$:

$$\rho(a) = \sum_j \rho\left(\sum_i \lambda_{ij} g_{ij}\right) \hat{\sigma}_j^i, \quad a \in C_i(\hat{K}),$$

есть цепь с коэффициентами в Γ' . Далее, разрешается умножать цепи $\rho(a)$ на любые элементы из Γ' ; это умножение коммутирует с ∂ . Гомологии этого комплекса называются гомологиями с коэффициентами в представлении $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma'$, $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ и обозначаются через $H_i^\rho(K)$.

Пример 1. Если $\Gamma' = \Gamma$ и $\rho \equiv 1$, то мы имеем, по определению,

$$H_i^\rho(K) = H_i(K).$$

Пример 2. Если $\mathbb{Z} = \Gamma'$ и $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ имеет вид

$$\rho\left(\sum \lambda_j g_j\right) = \sum \lambda_j,$$

то мы имеем

$$H_i^\rho(K) = H_i(K).$$

Проверьте это равенство.

Пример 3. Если K — неориентируемое многообразие, $K = M^n$, то имеется понятие «ориентации пути», т. е. гомоморфизм $\pi_1(K) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ (см. [1], ч. II, § 17); возникает гомоморфизм

$$\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

где

$$\rho\left(\sum \lambda_i g_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(g_i).$$

Гомологии $H_i^\rho(K)$ называются «гомологиями с локальными коэффициентами». Когомологии $H_i^\rho(K)$ определяются очевидным образом через сопряженный комплекс.

Задача 1. Докажите, что для замкнутого многообразия M^n имеем $H_n^\rho(M^n) = \mathbb{Z}$.

Пусть имеется расслоение $E \xrightarrow{p} B$ со слоем F и $\pi_1(B) = D$ действует по группе $H_q(F)$ переносами $g: H_q(F) \rightarrow H_q(F)$, $g \in D$. Тем самым мы вводим действие кольца $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$ на $H_q(F) = M_q$. Более общо: пусть элементы кольца Γ действуют как операторы в линейном пространстве M (или задано представ-

ление ρ кольца Γ в виде линейных преобразований $M \rightarrow M$). Определим гомологии $H_i^\rho(B, M)$. Пусть $B = K$ и задан комплекс Γ -цепей $\hat{K}$ (см. выше). Формально определяются цепи со значением в M :

$$a = \sum_j m_j \hat{\sigma}_j^i, \quad m_j \in M,$$

и действие кольца Γ на этих цепях

$$g(a) = \sum_j g(m_j) \hat{\sigma}_j^i,$$

где $g(m)$ определено в силу представления ρ . Это действие коммутирует с границей ∂ , которая определяется естественно.

Возникают гомологии, обозначаемые через $H_i^\rho(B, M)$, где Γ действует на M представлением ρ (или, как говорят, M — Γ -модуль). Когомологии $H_i^\rho(B, M)$ определяются, как всегда, через сопряженный комплекс коцепей.

Для расслоений $E \xrightarrow{p} B$ со слоем F группы $H_j(F)$ есть Γ -модули в силу действия $\pi_1(B)$ на слое параллельными переносами. Имеем гомологии $H_j^\rho(B, H_i(F))$.

Замечание. В теореме Лере (см. § 8) для неоднослойной базы $E_{q,i}^{(2)} \neq H_q(B, H_i(F))$. Следует изменить это на $H_q^{(2)}(B, H_i(F)) = H_q^\rho(B, H_i(F))$. Представление ρ измеряет «сперкационные» операторы d_1 . Все остальное остается верным.

Пример. Для накрытия $E \xrightarrow{p} B$ со слоем из k точек $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$ имеем

$$H_q(F) = 0, \quad q \neq 0.$$

$H_0(F) = M$ имеет ранг k .

Группа $\pi_1(B)$ действует на слое F и на группах $M = H_0(F)$.

Задача 2. Докажите равенства

$$H_q^\rho(B, H_0(F)) = H_q(E), \quad H_q^\rho(B, H^0(F)) = H^q(E).$$

Задача 3. Вычислите группы $H_i^\rho(B, M)$ и $H_i^\rho(B, M)$, где ρ — любое представление Γ в автоморфизмы линейного пространства.

Задача 4. Вычислите гомологии линзового пространства (см. § 4) $L_m^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1})$ для представления $\rho: \pi_1(L) = \mathbb{Z}_m \rightarrow$ (корни m -й степени из единицы, действующие на $\mathbb{C} \rightarrow M$).

Постройте такие линейные представления

$$\rho: \mathbb{Z}_m \rightarrow GL(k, \mathbb{C}),$$

что

$$H_q^\rho(L_m^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1})) = 0$$

для всех $q = 0, 1, 2, \dots$. Сделайте это первоначально для $n = 2$ (трехмерные линзы).

Задача 5. Найдите явно клеточное разбиение сферы S^{2n-1} , инвариантное относительно действия группы Z_m , где базисное преобразование T действует так:

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{T} \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_1}{m}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}} z_n \right) \\ (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1)$$

(см. § 4). Для $n = 2$ это клеточное разбиение имеет клетки

$$T\sigma^0, T\sigma^1, T^j\sigma^2, T^j\sigma^3; \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

и граничный оператор

$$\partial\sigma^0 = 0, \quad \partial\sigma^1 = (1 - T)\sigma^0, \\ \partial\sigma^2 = (1 + T + \dots + T^{m-1})\sigma^1, \quad \partial\sigma^3 = (1 - T^m)\sigma^2.$$

Используя такие линейные представления группы π_1 , что все $H_q^p(M^n, \mathbb{C}^n) = 0$, построим интересный топологический инвариант — «кручение Райдемайстера»: рассмотрим комплекс цепей представления ρ . Группы цепей — это комплексные линейные пространства с отмеченными базисами (клетками $\hat{\sigma}_q^n$). В силу условия $H_q^p = 0$, $q \geq 0$ имеем точную последовательность цепей

$$0 \rightarrow C_n^p \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^p \rightarrow \dots \rightarrow C_0^p \rightarrow 0,$$

где в каждом C_q^p есть отмеченный базис $e_q^{(i)} = \{\hat{\sigma}_q^i\}$. Произвол в выборе $\hat{\sigma}_q^i$ таков: $\hat{\sigma}_q^i \rightarrow \pm g(\hat{\sigma}_q^i)$, $g \in \pi_1$. Произведем такую процедуру: выберем в C_{n-1}^p другой базис; первая часть его — это базис в группе ∂C_n^p , полученный из $\hat{\sigma}_q^n$. Вторая часть выбирается произвольно в пространстве $C_{n-1}^p / \text{Im } \partial$.

Обозначим новый базис в C_{n-1}^p через $\bar{e}^{n-1}$. Имеется детерминант перехода $\det(e^i, \bar{e}^i)$ от одного базиса к другому. Базис $\bar{e}^i$ во второй части $C_{n-2}^p / \text{Im } \partial$ переходит в C_{n-2}^p с помощью ∂ ; там этот базис дополняется до полного базиса в C_{n-2}^p выбором базиса в $C_{n-2}^p / \text{Im } \partial$. Возникает базис $\bar{e}^{n-2}$ в C_{n-2}^p . Имеем детерминант перехода $\det(e^{n-2}, \bar{e}^i)$ от старого базиса в C_{n-2}^p к новому («старый» базис в C_q^p фиксирован клетками). Далее, переходим к C_{n-3}^p и т. д. Получаем базисы $\bar{e}^k$ во всех C_k^p и набор чисел $\det(e^k, \bar{e}^k)$. Рассмотрим число

$$R(C, \rho) = \det(e^{n-1}, \bar{e}^{n-1}) \det(e^{n-2}, \bar{e}^{n-2})^{-1} \dots \\ \dots \det(e^{n-k}, \bar{e}^{n-k})^{(-1)^{k+1}} \dots \det(e^0, \bar{e}^0)^{(-1)^{n+1}}.$$

Это число называется «кручением Райдемайстера» R . Произвол в выборе базисных клеток и их ориентаций ведет к изменению $R \rightarrow \lambda R$, где $\lambda = \pm \det \rho(\pi_1)$.

Оказывается, это число (с точностью до умножений $R \rightarrow \lambda R$, $\lambda = \pm \det \rho(\pi_1)$) не зависит от триангуляции и является топологическим (кусочно-линейным) инвариантом комплекса и инвариантом диффеоморфизма многообразия. Мы этого не доказываем (см. [63]).

Задача 6. Вычислите кручение R для трехмерных линз $L_p^3(q)$, где q — вычет $(\text{mod } p)$, если $\rho: Z_p \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{C}$ с действием Z_p в виде умножения на $\sqrt[p]{1}$.

Кольцо когомологий линзы $L_p^3(q)$ при нечетном p и любом q имеет две образующие $u \in H^1$, $v \in H^2$:

$$H^0(L, Z_p) = Z_p, \\ H^1(L, Z_p) = Z_p(u), \\ H^2(L, Z_p) = Z_p(v = \delta_* u \text{ mod } p), \\ H^3(L, Z_p) = Z_p(w)$$

($\pm w$ приведенная $\text{mod } p$ образующая группы $H^3(L, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$).

Задача 7. Докажите, что произведение в $H^*(L, Z_p)$ имеет вид:

$$uv = qw. \quad (2)$$

Напомним, что линза $L = L_p^3(q)$ строилась так: $L = S^3/Z_p$, где образующая $g \in Z_p$ действует на сфере S^3 так (см. § 4):

$$(z_1, z_2) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2 \right), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Так как $\delta_* u = v$ и w определен однозначно с точностью до знака, то произвол в выборе числа q возникает из-за преобразований $u \rightarrow \lambda u$, $w \rightarrow \pm w$ (λ взаимно просто с p). При этом из (2) получим:

$$u \rightarrow \lambda u, \quad v \rightarrow \lambda v, \quad w \rightarrow \pm w, \\ uv \rightarrow \pm \lambda^2 qw.$$

Вывод. Поскольку кольцо когомологий и операторы δ_* гомотопически инвариантны, вычеты q и $\bar{q} = \pm \lambda^2 q$ эквивалентны если рассматривать гомотопические инварианты линз. Например:

а) $p = 3$, $q = 1$ или $\bar{q} = 2$. Вычеты вида $\pm \lambda^2$ — это 1 и 2 в Z_p ($\lambda \neq 0$).

б) $p = 5$, $q = 1, 2, 3, 4$, $\lambda^2 = (1, 4, 9 \equiv 4, 16 \equiv 1)$.

Вычеты вида $\pm \lambda^2$: (1, 4) в Z_5 .

Поэтому $L_5^3(1)$ и $L_5^3(2)$ гомотопически не эквивалентны.

в) $p = 7$, $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

$$\lambda^2 = 1, 4, 2, 2, 4, 1,$$

$$-\lambda^2 = 6, 3, 5, 5, 3, 6.$$

Здесь гомотопический инвариант $(\pm \lambda^2 q)$ ничего не дает, так как $(\pm \lambda^2) \equiv 1 \pmod{7}$, не равные нулю.

Задача 8. Выясните, какие из линз для $p = 7$ топологически различны, используя кручение R . (Интересно, что здесь впервые появляются топологически различные замкнутые гомотопически эквивалентные многообразия. Для односвязных многообразий этот вопрос сложнее.)

Гомологии и когомологии с коэффициентами в представлении ρ для $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi_1]$ появляются также в задачах о продолжении отображений с подкомплекса $L \rightarrow X$ на комплекс $K \supset L$, если $\pi_1(X)$ действует на $\pi_n(X)$ и при продолжении сечений расслоений, — см. § 9, где эти задачи рассматривались в односвязном случае.

Рассмотрим в виде интересного примера вопрос о построении на n -мерном (например, на 4-мерном многообразии M^4) метрики сигнатуры $(+ - - -)$. Так как гомотопически внутренность светового конуса в пространстве Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$ стягивается к одномерной временной оси канонической деформацией, то множество возможных световых конусов (т. е. форм g_{ab} типа $(+ - - -)$) в $\mathbb{R}^4$ гомотопически эквивалентно множеству направлений $\mathbb{RP}^3$ (для $\mathbb{R}^n$ имеем $\mathbb{RP}^{n-1}$). Поэтому наша задача эквивалентна задаче о построении поля одномерных направлений на M^4 , т. е. сечения касательного расслоения

$$E \xrightarrow{\rho} M^4, \text{ слой } F = \mathbb{RP}^3.$$

Так как особенности типичного векторного поля сосредоточены в изолированных точках (т. е. для векторных полей препятствие возникает лишь при продолжении поля на 4-мерный остов с 3-мерного), то это же верно и для полей направлений. Мы имеем препятствующую коцель α (см. § 9), $\alpha \in C^1(M^4, \pi_3(F)) = C^1(M^4, \mathbb{Z})$, так как $\pi_3(\mathbb{RP}^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Однако эту коцель правильно рассматривать как класс когомологий из группы $H_p^1(M^4, \pi_3(F))$, где $\pi_1(M^4)$ действует на $\pi_3(F)$.

Задача 9. Покажите, что если $\alpha \sim 0$ в группе $H_p^1(M^4, \pi_3(F))$, то можно изменить сечение (поле направлений) на 3-остове базы так, что $\alpha \equiv 0$ и сечение можно построить на всем M^4 .

Далее имеем два случая.

1) Многообразие M^4 ориентируемо и компактно. Здесь действие $\pi_1(M^4)$ на $\pi_3(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}$ тривиально, $H_p^1(M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Задача 10. Докажите, что $\alpha = \chi(M^4)$ — эйлерова характеристика (как и для векторных полей).

2) Многообразие M^4 неориентируемо. Здесь мы имеем $\alpha \in H_p^1(M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, где ρ — нетривиальное представление $\pi_1(M^4)$ на $\pi_3(F) = \mathbb{Z}$.

Задача 11. Докажите, что и в этом случае $\alpha = \chi(M^4)$. Итак, в обоих случаях построение поля направлений (метрики сигнатуры $+ - - -$) равносильно условию $\chi(M^4) \equiv 0$.

Для незамкнутых многообразий интересно построить на M^4 метрику g_{ab} , которая вне компактного множества близка к метрике Минковского. Тем самым открытое многообразие M^4 (топологически) допускает компактификацию одной точкой ∞ до многообразия $\bar{M}^4 \supset M^4$. В самой точке $\infty \in \bar{M}^4$, в силу свойств метрики Минковского, имеем особую точку степени 2 искомого поля направлений (докажите!). Можно ли построить на $\bar{M}^4$ поле направлений, имеющее только одну особую точку степени 2? Задача сводится к предыдущей, но требуется $\chi(\bar{M}^4) = 2$ или $\chi(M^4) = 1$.

Задача 12. Докажите, что гомотопические классы полей направлений (или метрик типа $(n, 1)$) на многообразии M^{n+1} определяются гомоморфизмами $\pi_1(M^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = (\pm 1)$ (замкнутые пути, обнос вдоль которых меняет направление стрелок, дают -1), а также еще одним классом когомологий

$$\gamma \in H_p^n(M^{n+1}, \pi_n(\mathbb{RP}^n)).$$

Пример. Пусть из $\mathbb{R}^3$ удалены прямая и точка. Оставшаяся область $U \subset \mathbb{R}^3$ имеет гомотопический тип $S^2 \vee S^1$ (букет). Пусть задано поле направлений в области U

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{RP}^2.$$

Гомотопический класс $[f]$ определяется гомоморфизмом: $\pi_1(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ и еще классом когомологий $(\pm \gamma)$

$$\pm \gamma \in H_p^2(U, \pi_2(\mathbb{RP}^2)) = H_p^2(S^2 \vee S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

где $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ действует на $\pi_2(\mathbb{RP}^2)$ в силу того, что $f_*(\pi_1(U)) \subset \pi_1(\mathbb{RP}^2)$. В данном случае происходит обращение ориентации (действие ρ нетривиально). Накрытие $\tilde{K}$ над $K = S^2 \vee S^1$ имеет вид, показанный на рис. 45. Все 2-коцели — коциклы, некогомологичны нулю. $C_p^2(K) = H_p^2(K) = \mathbb{Z}$ (проверьте).

Рассмотрим в качестве полезного примера задачу о гомотопических классах отображений тора T^2 в проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$:

$$T^2 \xrightarrow{f} \mathbb{RP}^2.$$

Простейшим гомотопическим инвариантом отображения f является индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_*: \pi_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2.$$

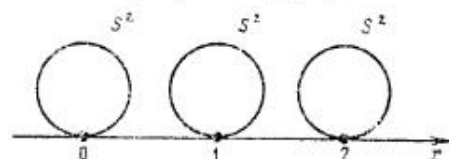


Рис. 45. Действие: $x \mapsto x + 1$.

Если гомоморфизм f_* тривиален, то отображение f на одномерном остове может быть стянуто в точку. Гомотопические классы таких отображений (где $f_*(\pi_1) = 0$) сводятся к гомотопическим классам отображений сферы S^2 в $\mathbb{R}P^2$ и определяются однозначно степенью отображения (проверьте!). Более интересен тот случай, когда гомоморфизм f_* нетривиален. Без ограничения общности можно считать, что $f_*(a) = 1$, $f_*(b) = 0$, где a и b — параллель и меридиан тора. Рассмотрим два отображения f и g : $T^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ такие, что $f_* = g_*$. Считая тор разбитым в стандартное клеточное разбиение

$$\sigma^0, \sigma_1^1 = a, \sigma_2^1 = b, \sigma^2,$$

мы, исходя из условия $f_* = g_*$, приводим гомотопией отображения f и g к тому, что они совпадают на одномерном остове. Пара отображений f и g на клетке σ^2 , совпадающих на границе $\partial\sigma^2$, определяет «различающий элемент» из группы $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$, обозначаемый через $\alpha(\sigma^2, f, g) \in \mathbb{Z} = \pi_2(\mathbb{R}P^2)$, который представляет собой элемент группы когомологий

$$H_p^1(T^2; \pi_2(\mathbb{R}P^2)). \quad (3)$$

Здесь $\rho = f_* = g_*$.

Задача 13. Докажите, что группа (3) равна $\mathbb{Z}_2$, если ρ нетривиален.

Таким образом, мы имеем не более двух различных гомотопических классов отображений $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ при фиксированном гомоморфизме f_* фундаментальных групп.

§ 12. Когомологии гиперэллиптических римановых поверхностей. Торы Якоби. Геодезические на многоосных эллипсоидах. Связь с конечнозонными потенциалами

Гиперэллиптическая риманова поверхность рода g задается уравнением

$$w^2 - P_{2g+1}(z) = 0 \quad \text{или} \quad w^2 - \tilde{P}_{2g+2}(z) = 0,$$

где $P_{2g+1}(z)$, $\tilde{P}_{2g+2}(z)$ — многочлены без кратных корней (см. [1], ч. II, § 4).

На любой римановой поверхности R определены голоморфные дифференциалы ω (дифференциалы первого рода), имеющие в локальных координатах $z = u + iv$ вид

$$\omega = f(z) dz,$$

где $f(z)$ — комплексно-аналитическая функция от z . Возможный вид $f(z)$ мы выясним ниже.

В важном примере гиперэллиптических римановых поверхностей R_g рода $g > 0$ голоморфные дифференциалы имеют вид:

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}}{w} dz = \frac{z^{k-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}} dz, \quad k = 1, 2, \dots, g, \quad (1)$$

где поверхность задана многочленом $P_{2g+1}(z) = \prod_{i=1}^{2g+1} (z - z_i)$ степени $2g + 1$.

Проверим голоморфность этих дифференциалов. Вне точек $z = z_i$ (нулей многочлена P_{2g+1}) и $z = \infty$ голоморфность очевидна. В окрестности точки $z = z_i$ за локальный параметр можно принять $\xi = \sqrt{z - z_i}$. Тогда $z = \xi^2 + z_i$, $dz = 2\xi d\xi$, и выражения (1) принимают вид

$$\omega_k = 2 \frac{(\xi^2 + z_i)^{k-1}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1} (\xi^2 + z_i - z_j)}} d\xi, \quad (2)$$

поэтому дифференциалы ω_k при $z = z_i$ также голоморфны. В бесконечно удаленной точке $z = \infty$ локальным параметром служит $\xi = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $z = \frac{1}{\xi^2}$, $dz = -\frac{2d\xi}{\xi^3}$, откуда

$$\omega_k = -\frac{2\xi^{2(g-k)}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+1} (1 - \xi z_i)}} d\xi, \quad (3)$$

и ω_k также голоморфны при $k \leq g$.

Любой голоморфный дифференциал ω является локально точным: $\omega = f(z) dz = d\tilde{f}(z)$, где $\tilde{f}(z)$ — первообразная функции $f(z)$ — также комплексно-аналитическая функция. Поэтому 1-форма ω на поверхности R является замкнутой: $d\omega = 0$. Ненулевая форма ω никогда не является точной, поскольку на компактной поверхности R нет нетривиальных голоморфных функций (см. [1], ч. II, § 4). Аналогично, форма $\bar{\omega} = \overline{f(z)} d\bar{z}$ также замкнута и не является точной.

Формы $\omega_1, \dots, \omega_g$ для гиперэллиптической поверхности R_g линейно независимы (над комплексными числами). Поэтому формы $\operatorname{Re} \omega_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \bar{\omega}_k)$, $\operatorname{Im} \omega_k = \frac{1}{2i}(\omega_k - \bar{\omega}_k)$ образуют базис в группе когомологий $H^1(R_g; \mathbb{R}) = \mathbb{R} + \dots + \mathbb{R}$ ($2g$ слагаемых).

З а м е ч а н и е. Группа когомологий $H^1(R; \mathbb{R})$ любой римановой поверхности R определяется через голоморфные дифференциалы. Их существование является трудной теоремой (см. [19]).

Задача 1. Докажите, что любые $g + 1$ голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g линейно зависимы.

Выберем базис циклов $a_i, b_i, i = 1, \dots, g$, в гомологиях $H_1(R_g, \mathbb{Z})$ такой, чтобы их попарные индексы пересечений имели вид (см. [1], ч. II, § 15):

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (4)$$

Разрезав поверхность R_g по этим циклам, мы превратим ее в $4g$ -угольник $\tilde{R}_g$ (см. § 3).

Определены периоды любого замкнутого дифференциала по циклам a_i, b_i :

$$\int_{a_i} \omega = A_i, \quad \int_{b_i} \omega = B_i, \quad i = 1, \dots, g. \quad (5)$$

Пусть ω' — другой замкнутый дифференциал, A'_i, B'_i — его A - и B -периоды.

Л е м м а 1. Справедливо соотношение:

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \sum_{i=1}^g (A_i B'_i - B_i A'_i). \quad (6)$$

Доказательство. В $4g$ -угольнике $\tilde{R}_g$ замкнутая форма ω является точной: $\omega = df$. Поэтому $\omega \wedge \omega' = d(f\omega')$, и в силу формулы Стокса

$$\int_{\tilde{R}_g} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial \tilde{R}_g} f\omega.$$

Пусть Q и Q' — точки на ребрах a_i и a_i^{-1} $4g$ -угольника $\tilde{R}_g$, переходящие в одну на поверхности R_g . Тогда QQ' — это цикл на поверхности R_g , гомологичный циклу b_i (см. рис. 46), поэтому имеем:

$$\int_{QQ'} \omega = f(Q') - f(Q) = \int_{b_i} \omega = B_i.$$

Аналогично, для точек R, R' , склеивающихся на берегах b_i, b_i^{-1} , получим:

$$f(R') - f(R) = -A_i.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\begin{aligned} \int_{a_i + b_i + a_i^{-1} + b_i^{-1}} f\omega' &= \\ &= \int_{a_i} f\omega' + \int_{b_i} f\omega' - \int_{a_i} (f + B_i) \omega' - \int_{b_i} (f - A_i) \omega' = A_i B'_i - B_i A'_i, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

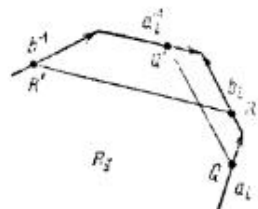


Рис. 46.

Теорема 1. Для периодов (A_i, B_i) и (A'_i, B'_i) голоморфных дифференциалов ω, ω' выполняются следующие соотношения (билинейные соотношения Римана):

$$\sum_{k=1}^g (A_k B'_k - B_k A'_k) = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^g (A_k \bar{B}_k - B_k \bar{A}_k) > 0, \quad (8)$$

если дифференциал ω не равен нулю.

Доказательство. Если (локально) $\omega = f(z) dz, \omega' = g(z) dz$ — голоморфные дифференциалы, то $\omega \wedge \omega' = fg dz \wedge dz = 0$. Поэтому в силу леммы

$$\sum_{k=1}^g (A_k B'_k - B_k A'_k) = 0.$$

Первое соотношение доказано.

Рассмотрим теперь такой интеграл: $-\frac{1}{2i} \int_{R_g} \omega \wedge \bar{\omega}$. Поскольку $\omega \wedge \bar{\omega} = -2i|f|^2 dx \wedge dy$, где $\omega = f(z) dz$, этот интеграл положителен при $\omega \neq 0$. Поэтому будем иметь, применяя лемму к случаю $\omega' = \bar{\omega}$:

$$0 < -\frac{1}{2i} \int_{R_g} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_{R_g} |f|^2 dx \wedge dy = -\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^g (A_k \bar{B}_k - \bar{A}_k B_k).$$

Теорема доказана.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической римановой поверхности R_g . Пусть

$$A_{ij} = \oint_{a_j} \omega_i, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (9)$$

Из доказанной теоремы вытекает.

Следствие 1. Матрица A_{ij} невырождена.

Доказательство. Из формулы (8) следует, что голоморфный дифференциал с нулевыми A -периодами тождественно равен нулю. Если бы матрица A_{ij} была вырождена, то можно было бы построить ненулевой голоморфный дифференциал с нулевыми периодами. Следствие доказано.

Согласно следствию 1 можно выбрать новый базис

$$\varphi_k = \frac{c_1 k z^{k-1} + \dots + c_g k}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}} dz = \sum_{i=1}^g c_{ik} \omega_{g-i+1}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (10)$$

такой, что A -периоды имеют вид

$$\int_{a_j} \varphi_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Пусть $B_{ij} = \int_{b_j} \varphi_i$ — матрица B -периодов, построенная по этому базису. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Матрица B_{ij} симметрическая с положительно определенной мнимой частью.

Доказательство. Симметрия B_{ij} вытекает из (7) при $\omega = \varphi_i$, $\omega' = \varphi_j$. Применим теперь неравенство (8) к голоморфному дифференциалу $\omega = x_1 \varphi_1 + \dots + x_g \varphi_g$, где x_k — действительные числа. Для этого дифференциала периоды A_k имеют вид $A_k = x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk}$. Отсюда следует неравенство:

$$0 < \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g [x_k (\overline{x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk}}) - x_k (x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk})] = \\ = \sum_{k,j=1}^g x_j x_k \operatorname{Im} B_{jk},$$

что и доказывает положительную определенность матрицы $\operatorname{Im} B_{jk}$. Следствие доказано.

Построим по матрице (B_{ij}) целочисленную решетку Γ в пространстве $\mathbb{C}^g$, порожденную линейно независимыми векторами $e_1, \dots, e_{2g}$, где $(e_k)^i = \delta_{ik}$, $(e_{g+k})^i = B_{ik}$, $k = 1, 2, \dots, g$.



Рис. 47. Циклы на эллиптической римановой поверхности R_1 : $\omega^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Пунктиром обозначена часть цикла b_1 , лежащая на втором листе.

Решетка Γ определяет $2g$ -мерный тор $T^{2g} = \mathbb{C}^g / \Gamma$ (см. [1], ч. II, § 4), называемый **тором Якоби** (или **многообразием Якоби**) римановой поверхности R_g .

Вывод. Тор Якоби T^{2g} является абелевым тором (см. [1], ч. II, § 4).

Разберем в виде примера случай поверхностей рода 1 («эллиптических кривых»): $\omega^2 = P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. В этом случае имеется два цикла a_1, b_1 (см. рис. 47).

Здесь имеется один голоморфный дифференциал $\varphi = c dz / \sqrt{P_3(z)}$, где число c выбирается из условия $\oint_{a_1} \varphi = 1$.

Положим $\tau = B_{11} = \int_{b_1} \varphi$, где $\operatorname{Im} \tau > 0$. Векторы $1, \tau$ определяют двумерный тор Якоби T^2 римановой поверхности R_1 . Сама поверхность R_1 эквивалентна тору (как многообразие; см. [1], ч. II, § 4).

Эта эквивалентность строится так. Фиксируем точку P_0 на поверхности R_1 . Для произвольной точки P на R_1 определим величину $A(P)$, полагая

$$A(P) = \int_{P_0}^P \varphi = \int_{P_0}^P \frac{c dz}{\sqrt{P_3(z)}}. \quad (12)$$

Путь интегрирования, ведущий на римановой поверхности из точки P_0 в точку P , определен неоднозначно, с точностью до прибавления любого цикла. Поэтому величина $A(P)$ определена лишь с точностью до целочисленной линейной комбинации A - и B -периодов дифференциала φ :

$$A(P) \sim A(P) + n \cdot 1 + m \cdot \tau, \quad n, m \text{ целые.} \quad (13)$$

Таким образом, определено отображение $A(P)$ эллиптической римановой поверхности R_1 в ее тор Якоби T^2 .

Утверждение 1. Отображение $A(P)$ всюду регулярно, т. е. его дифференциал нигде не обращается в нуль.

Доказательство очевидно.

Следствие. Отображение $A(P)$ является (комплексно-аналитическим) изоморфизмом.

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что $A(P)$ — накрытие. Ясно, что $A(P)$ переводит образующие a_1, b_1 группы $\pi_1(R_1)$ в образующие группы $\pi_1(T^2)$. Поэтому накрытие $A(P)$ тривиально (см. [1], ч. II, § 19). Следствие доказано.

З а м е ч а н и е. В теории комплексно-аналитических функций доказывается, что любой комплексный тор T^2 является тором Якоби эллиптической римановой поверхности.

Для случая гиперэллиптических поверхностей R_g , где $g > 1$, для любого набора точек $Q_1, \dots, Q_g$ поверхности R_g определен вектор $A(Q_1, \dots, Q_g) = (A^1, \dots, A^g)$, где

$$A^k(Q_1, \dots, Q_g) = \int_{Q_0}^{Q_1} \varphi_k + \dots + \int_{Q_0}^{Q_g} \varphi_k, \quad k = 1, \dots, g. \quad (14)$$

Здесь $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ — стандартный базис голоморфных дифференциалов, нормированных условием $\int_{a_i} \varphi_k = \delta_{ik}$. Пути интегрирования от фиксированной точки Q_0 до точек $Q_1, \dots, Q_g$ выбираются согласованно. Эти пути определены лишь с точностью до целочисленной комбинации циклов

$$Q_0 Q_k \sim Q_0 Q_k + \sum_{i=1}^g m_i a_i + \sum_{j=1}^g n_j b_j. \quad (15)$$

Поэтому величины $A^k(Q_1, \dots, Q_g)$ определены с точностью до периодов голоморфных дифференциалов:

$$A^k(Q_1, \dots, Q_g) \sim A^k(Q_1, \dots, Q_g) + \sum_i m_i \delta_{ik} + \sum_j n_j B_{kj}, \quad (16)$$

или

$$A(Q_1, \dots, Q_g) \sim A(Q_1, \dots, Q_g) + \sum_{i=1}^g m_i e_i + \sum_{j=1}^g n_j e_{g+j}, \quad (17)$$

где $e_1, \dots, e_{2g}$ — построенные выше векторы, — образующие решетки Γ . Поэтому вектор-функция $A(Q_1, \dots, Q_g)$ принимает значения в торе Якоби $T^{2g} = \mathbb{C}^g / \Gamma$ римановой поверхности R_g . Это отображение называется *отображением Абеля*.

Утверждение 2. *Отображение Абеля обратимо (локально), если среди точек $Q_1, \dots, Q_g$ нет совпадающих.*

Доказательство. Для простоты вычислений будем считать, что среди точек $Q_1, \dots, Q_g$ нет точек ветвления. Тогда в окрестности точки Q_k в качестве локального параметра можно взять координату $z = z_k$. Вычислим якобиан преобразования $A(Q_1, \dots, Q_g) = \det(\partial A^i / \partial z_k)$. Вычисление удобно произвести в базисе $\omega_1, \dots, \omega_g$ (формула (1)). Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial A^i}{\partial z_k} = \frac{z_k^{i-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}, \quad j, k = 1, \dots, g.$$

Для искомого якобиана получим отсюда:

$$\det \left(\frac{\partial A^i}{\partial z_k} \right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^g \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}} \det \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1^{i-1} & \dots & z_g^{i-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i < j} (z_i - z_j)}{\prod_{k=1}^g \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}.$$

(Мы использовали известное из алгебры выражение для «детерминанта Вандермонда».) Видно, что этот якобиан отличен от нуля, если числа $z_1, \dots, z_g$ попарно различны. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Задача обращения отображения Абеля известна в геометрии римановых поверхностей как «задача обращения Якоби». Эта задача допускает явное решение: любая симметрическая функция от координат $z_1, \dots, z_g$ точек $Q_1, \dots, Q_g$ выражается через θ -функцию Якоби—Римана (см. [1], ч. II, § 4), построенную по (абелеву) тору Якоби T^{2g} . Не давая здесь общих формул, приведем формулу для вычисления суммы координат $z_1 + \dots + z_g$ точек $Q_1, \dots, Q_g$:

$$z_1 + \dots + z_g = \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(y_1, \dots, y_g) + c, \quad (18)$$

где оператор $\frac{d}{dx}$ имеет вид

$$\frac{d}{dx} = V_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + V_g \frac{\partial}{\partial y_g}, \quad (19)$$

причем

$$V_k = c_{1k}, \quad k = 1, \dots, g \quad (20)$$

(величины c_{jk} определены формулами (10)), c — константа.

Сами точки $Q_1, \dots, Q_g$ определяются из уравнений $A(Q_1, \dots, Q_g) = y$ однозначно с точностью до перестановки.

Применим преобразование Абеля к интегрированию уравнений Ковалевской для движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Уравнения задачи Ковалевской имеют вид (см. [31])

$$\begin{aligned} 2\dot{r} &= qr, & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dot{q} &= -pr - \mu\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} &= \mu\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ \mu &= \text{const.} \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (21) могут быть записаны в гамильтоновой форме, но мы ее не приводим (см. ниже Приложение 1). Эти уравнения имеют следующие интегралы:

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1 \quad (\text{энергия}), \quad (22)$$

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 \quad (\text{момент}), \quad (23)$$

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2 \quad (\text{интеграл Ковалевской}). \quad (24)$$

Кроме того, выполнено условие связи $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Рассмотрим совместную поверхность уровня этих интегралов: $H = 6h, L = 2l, K = k^2$, где h, l, k^2 — константы.

При выполнении условия связи $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ уравнения (22)–(24) задают двумерную поверхность (инвариантное многообразие динамической системы (21)).

Введем координаты s_1, s_2 на этой поверхности (переменные Ковалевской), полагая

$$s_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

где $x_{1,2} = p \pm iq, R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu lz + \mu^2 - k^2, R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 6hx_1 x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2$.

З а д а ч а 2. Докажите, что в переменных s_1, s_2 уравнения (21) запишутся в виде

$$\dot{s}_1 = \pm \frac{i\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \mp \frac{i\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad (25)$$

где $\Phi(z)$ — многочлен пятой степени, имеющий вид

$$\Phi(z) = \{z[(z - 3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2\}(z - 3h - k)(z - 3h + k). \quad (26)$$

З а м е ч а н и е. Уравнение (25) совпадает с указанным в [1], ч. II, § 30 уравнением коммутативности на поверхности уровня двух интегралов.

Правые части уравнений (25) являются однозначными функциями на гиперэллиптической римановой поверхности рода 2, задаваемой уравнением $w^2 = \Phi(z)$. Поэтому мы получаем движения пары точек (P_1, P_2) по этой римановой поверхности.

Пусть, например, все корни многочлена $\Phi(z)$ вещественны и различны. Обозначим их через $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Если

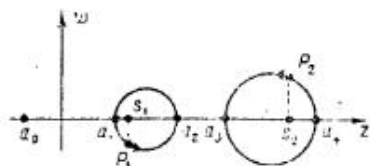


Рис. 48.

начальные данные для системы (25) выбрать вещественными и такими, что $a_1 \leq s_1 \leq a_2$, $a_3 \leq s_2 \leq a_4$, то в любой момент времени t $s_i(t)$ будут вещественными и удовлетворять таким же неравенствам. Точки $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$ будут двигаться на римановой поверхности по циклам, лежащим над отрезками $[a_1, a_2]$ и $[a_3, a_4]$ (см. рис. 48). Эти циклы склеены из двух экземпляров $[a_1, a_2]^+$ и $[a_1, a_2]^-$, $[a_3, a_4]^+$ и $[a_3, a_4]^-$ по концам соответствующих отрезков. «Фазовая точка» (P_1, P_2) движется по двумерному (вещественному) тору. Для интегрирования уравнений (25) применим к ним преобразование Абеля, построенное по гиперэллиптической кривой рода 2, задаваемой уравнением $w^2 = \Phi(z)$. Здесь мы имеем два независимых голоморфных дифференциала: $\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$ и

$\frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$. Положим

$$\begin{aligned} A^1(P_1, P_2) &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}, \\ A^2(P_1, P_2) &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \end{aligned} \quad (27)$$

(P_0 — любая точка римановой поверхности).

У т в е р ж д е н и е 3. После преобразования (27) уравнения Ковалевской (25) переходят в линейную систему с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^1(P_1(t), P_2(t)) &= 0, \\ \frac{d}{dt} A^2(P_1(t), P_2(t)) &= \frac{i}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что точки $P_1(t)$, $P_2(t)$ отличны от точек ветвления $a_0, \dots, a_4$. Тогда локальные па-

раметры в окрестности этих точек — это s_1, s_2 . Поэтому в силу уравнений (25) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^1(P_1(t), P_2(t)) &= \\ &= \frac{\dot{s}_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \frac{i}{2} \frac{V\Phi(s_1)}{\sqrt{\Phi(s_1)}} - \frac{i}{2} \frac{V\Phi(s_2)}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = 0, \\ \frac{d}{dt} A^2(P_1(t), P_2(t)) &= \frac{\dot{s}_1 s_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2 s_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

З а д а ч а 3. Докажите, что система вида

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{s_2 V\Phi(s_1)}{s_1 - s_2}, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{s_1 V\Phi(s_2)}{s_2 - s_1} \quad (29)$$

при преобразовании Абеля также переходит в систему с постоянными коэффициентами.

В силу утверждения 3 мы имеем:

$$A^1(P_1(t), P_2(t)) = A^1(P_1(t_0), P_2(t_0)), \quad (30)$$

$$A^2(P_1(t), P_2(t)) = A^2(P_1(t_0), P_2(t_0)) + \frac{i}{2}(t - t_0).$$

Таким образом, после перехода на многообразие Якоби система уравнений Ковалевской полностью решается. Чтобы получить явную зависимость от времени t переменных s_1, s_2 , нужно обратить замену переменных (27), т. е. решить задачу обращения Якоби.

В ы в о д. Инвариантное многообразие $\{H = 6h, L = 2l, K = k^2, \gamma^2 = 1\}$ задачи Ковалевской является (при продолжении в комплексную область) тором Якоби T^4 римановой поверхности $\{w^2 = \Phi(z)\}$.

Приведем теперь другие примеры гамильтоновых систем, допускающих интегрирование с помощью преобразования Абеля, т. е. таких систем, инвариантные торы которых при продолжении в комплексную область являются торами Якоби римановых поверхностей.

П р и м е р 1. Напомним (см. [1], ч. II, § 30), что «уравнение коммутативности»

$$[\mathcal{L}, A_2 + c_1 A_1 + c_2 A_2] = 0, \quad (31)$$

где $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ — оператор Штурма — Лиувилля, A_0, A_1, A_2 — дифференциальные операторы по x первого, третьего и пятого порядков, c_1, c_2 — константы, может быть записано в лагранжевом виде

$$\frac{\delta L}{\delta u(x)} = 0 \quad (32)$$

с лагранжианом

$$L = L(u, u', u'') = \frac{u'^2}{2} - \frac{5}{2} u'' u^2 + \frac{5}{2} u^4 + c_1 \left(\frac{u'^2}{2} + u^3 \right) + c_2 u^2 + c_3 u; \quad c_3 = \text{const.} \quad (33)$$

Решения системы (32) — это конечнозонные (двухзонные) периодические и почти периодические потенциалы оператора $\mathcal{L}$ (см. [1], ч. II, § 30). Соответствующая гамильтонова система с двумя степенями свободы имеет два независимых интеграла J_1, J_2 в инволюции, т. е. является вполне интегрируемой. Явные координаты γ_1, γ_2 на поверхностях уровня этих интегралов имеют вид (для случая $c_1 = 0$)

$$u = -2(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \frac{1}{8}(3u^2 - u'') = \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \quad (34)$$

где $\lambda_0, \dots, \lambda_4$ — корни многочлена, $P_5(\lambda_i) = 0$; выражение коэффициентов многочлена $P_5(\lambda)$ через константы c_1, c_2, c_3 и интегралы J_1, J_2 дано в формулах (30, 30) части II книги [1]. В этих координатах уравнение (32) запишется в виде, совпадающем с (25) после переобозначения $s_i \rightarrow \gamma_i, t \rightarrow x$ ([1], ч. II, уравнения (30, 33)) и поэтому также интегрируется заменой Абеля. (Риманова поверхность рода 2 задается в этом случае многочленом $P_5(\lambda)$.)

Обратим внимание, что формулы (29) описывают временную зависимость $u(x, t)$ решений уравнения КдФ (см. [1], ч. II, § 30), где $s_i \rightarrow \gamma_i$ (проверьте!).

З а м е ч а н и е. Уравнения коммутативности высших порядков также интегрируются преобразованием Абеля и тем самым имеют инвариантными многообразиями (в комплексной области) торы Якоби гиперэллиптических римановых поверхностей высших родов.

П р и м е р 2. В задаче Неймана о движении частицы на двумерной сфере

$$x^2 \equiv \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 1 \quad (35)$$

под действием квадратичного потенциала

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i x_i^2, \quad a_i = \text{const}, \quad (36)$$

уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + \lambda(t) x_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (37)$$

$$x^2 \equiv \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 1, \quad (37')$$

где $\lambda(t)$ — множитель Лагранжа, возникающий из-за изложения связи (35). Система (37), (37') может быть получена из гамильтонова потока на $\mathbb{R}^6$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i x_i^2 + \frac{1}{2} (x^2 y^2 - (xy)^2) \quad (38)$$

ограничением на сферу $x^2 = 1$.

З а д а ч а 4. Докажите, что функции

$$F_k(x, y) = x_k^2 + \sum_{i=0}^2 \frac{(x_i y_i - x_i y_k)}{a_i - a_k}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (39)$$

являются системой независимых интегралов в инволюции для системы с гамильтонианом (38).

Сам гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i F_i. \quad (40)$$

З а д а ч а 5. Проверьте, что преобразование

$$x' = y, \quad y' = -x, \quad H' = \sum_{i=0}^2 a_i^{-1} F_i \quad (41)$$

переводит построенный гамильтонов поток в геодезический поток на трехосном эллипсоиде («задача Якоби»)

$$\sum_{i=0}^2 \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \quad (42)$$

(геодезические на трехосном эллипсоиде найдены Якоби).

Покажем, что задача Неймана (а, значит, и задача Якоби) интегрируется преобразованием Абеля. Мы сведем задачу Неймана, следуя современным работам, к уже разобранным задаче о двухзонных потенциалах («уравнения коммутативности» (32)).

Пусть ψ_0, ψ_1, ψ_2 — собственные функции оператора $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ с собственными значениями a_0, a_1, a_2 соответственно, т. е. решения дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}\psi_i = a_i \psi_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (43)$$

Уравнения (43) переписываются в виде

$$\psi_i'' = -a_i \psi_i + u(x) \psi_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (44)$$

совпадающем с уравнениями (37) задачи Неймана после переобозначения $x \rightarrow t, \psi_i \rightarrow x_i, u(x) \rightarrow \lambda(t)$ (множитель Лагранжа). Осталось удовлетворить уравнению связи $\sum x_i^2 = 1$. Для этого выберем потенциал $u(x)$ двухзонным, причем так, чтобы нули

$\lambda_0, \dots, \lambda_4$ соответствующего многочлена $P_5(\lambda)$ (см. выше) имели вид:

$$\lambda_0 = a_0 < \lambda_1 < \lambda_2 = a_1 < \lambda_3 < \lambda_4 = a_2, \\ P_5(\lambda) = \prod_{i=0}^4 (\lambda - \lambda_i) \quad (45)$$

(«правые концы лакун» в спектре оператора $\mathcal{L}$ см. [1], ч. II, § 30). Оказывается, нужные нам решения уравнений (43) просто выражаются через переменные γ_1, γ_2 , определенные равенствами (34).

Задача 6. Докажите, что функции вида

$$\psi_i(x) = \alpha_i \sqrt{(a_i - \gamma_1(x))(a_i - \gamma_2(x))}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (46)$$

где α_i — константы, удовлетворяют уравнениям (43), если $u = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum_{i=0}^4 \lambda_i$,

$$\gamma_1 = 2i \sqrt{P_5(\gamma_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)}, \quad \gamma_2 = 2i \sqrt{P_5(\gamma_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)}.$$

Задача 7. Докажите, что если выбрать константы $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ в виде

$$\alpha_i = \left[\prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \right]^{-1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (47)$$

то для функций ψ_i вида (46) выполняется условие связи

$$\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 \equiv 1. \quad (48)$$

Формулы (46), (47) дают полное сведение задачи Неймана (а, значит, и задачи Якоби) к задаче обращения Якоби для римановой поверхности рода 2 с точками ветвления (45).

Любопытно отметить, что несмотря на совпадение инвариантных торков и потоков на них (даже в комплексной области!) для уравнения (32) двухзонных потенциалов, а также для задач Неймана и Якоби, все эти три гамильтоновы системы не являются канонически эквивалентными (проверьте!).

Разобранные нами детально системы Неймана и Якоби с двумя степенями свободы почти автоматически переписываются для больших размерностей. Интегрирование этих систем всегда может быть сведено с конечнозонным потенциалом.

§ 13. Простейшие свойства кэлеровых многообразий. Абелевы торы

Определение 1. Комплексное многообразие M^{2n} с эрмитовой метрикой $ds^2 = g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$, где $\overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} = g_{\beta\alpha}$, называется кэлеровым, если соответствующая вещественная 2-форма $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha < \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ замкнута: $d\Omega = 0$. Имеет место утвержде-

ние (см. [1], ч. I, § 27): для кэлеровой метрики форма $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ (n сомножителей) является ненулевым кратным элементом объема:

$$\Omega^n = c dV = c \sqrt{\det g_{\alpha\bar{\beta}}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n, \quad c \neq 0. \quad (1)$$

Следствие. Формы Ω^i , $i = 1, \dots, n$, на компактном кэлеровом многообразии не когомологичны нулю. Поэтому группы $H^{2i}(M^{2n}, \mathbb{R})$ нетривиальны.

Доказательство. Если форма Ω точная, $\Omega = d\omega$, то и форма Ω^n точная, $\Omega^n = d(\omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$. Но на компактном многообразии имеем:

$$\int_{M^{2n}} \Omega^n = c \int_{M^{2n}} dV \neq 0.$$

Значит, форма Ω не является точной. Следствие доказано.

Пример 1. Любая риманова поверхность является кэлеровым многообразием по соображениям размерности.

Пример 2. Эрмитова метрика на $\mathbb{C}P^n$ получается из формы

$$ds^2 = \sum_{k=0}^n dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_{k=0}^n z^k d\bar{z}^k \right) \left(\sum_{j=0}^n \bar{z}^j dz^j \right) \quad (2)$$

в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, которую будем рассматривать как форму на сфере S^{2n+1} : $|z^0|^2 + \dots + |z^n|^2 = 1$. Проверим, что форма ds^2 инвариантна относительно преобразований

$$z^k \mapsto e^{i\varphi} z^k, \quad \bar{z}^k \mapsto e^{-i\varphi} \bar{z}^k.$$

При указанном преобразовании будем иметь:

$$dz^k \mapsto e^{i\varphi} (dz^k + iz^k d\varphi), \quad d\bar{z}^k \mapsto e^{-i\varphi} (d\bar{z}^k - i\bar{z}^k d\varphi),$$

так что

$$\sum_k dz^k d\bar{z}^k \mapsto \sum_k dz^k d\bar{z}^k + i \left[\sum_k (z^k d\bar{z}^k - \bar{z}^k dz^k) \right] d\varphi + d\varphi^2, \\ \sum_k z^k d\bar{z}^k \mapsto \sum_k z^k d\bar{z}^k - i d\varphi, \quad \sum_j \bar{z}^j dz^j \mapsto \sum_j \bar{z}^j dz^j + i d\varphi.$$

Следовательно:

$$\sum_k dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k d\bar{z}^k \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right) \mapsto \\ \mapsto \sum_k dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k d\bar{z}^k \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right).$$

Таким образом, форму ds^2 можно рассматривать как метрику на $\mathbb{C}P^n$. Определяемая этой метрикой форма Ω имеет вид:

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum dz^k \wedge d\bar{z}^k - \frac{i}{2} \left(\sum z^k d\bar{z}^k \right) \wedge \left(\sum \bar{z}^k dz^k \right). \quad (3)$$

На сфере S^{2n+1} мы имеем: $\sum z^k \bar{z}^k = 1$, откуда $\sum z^k dz^k + \sum \bar{z}^k d\bar{z}^k = 0$. Поэтому ограничение формы Ω на сферу дает

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum dz^k \wedge d\bar{z}^k. \quad (4)$$

Эта форма замкнута (она рассматривалась в § 1 при изучении кольца когомологий пространства CP^n), поэтому многообразие CP^n кэлерово.

Пример 3. Приведем теперь пример компактного комплексного многообразия, не допускающего кэлеровой структуры, — многообразия Хопфа. Обозначим через Γ группу, действующую на пространстве $\mathbb{C}^n \setminus 0$, порожденную преобразованием $z \mapsto 2z$. Ясно, что фактор $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\Gamma$ по этому действию является компактным комплексным многообразием, гомеоморфным прямому произведению $S^1 \times S^{2n-1}$. Тогда $H^2(S^1 \times S^{2n-1}, \mathbb{R}) = 0$ ($n > 1$), и на этом многообразии нельзя ввести кэлеровой структуры при $n > 1$.

На кэлеровом многообразии определены периоды формы Ω — ее интегралы по двумерным циклам из $H_2(M^{2n}, \mathbb{Z})$. Говорят, что многообразие M^{2n} *ходжево*, если все периоды формы Ω целые (или становятся целыми после умножения на одно и то же число, $\Omega \rightarrow \lambda\Omega$).

Например, для многообразия CP^n мы знаем, что $H_2(CP^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, поэтому можно умножить метрику ds^2 на подходящее число, чтобы единственный период формы Ω стал целым числом.

Задача 1. Образующая в группе $H_2(CP^n, \mathbb{Z})$ — это подмногообразие CP^1 , задаваемое в CP^n уравнениями $z^2 = \dots =$

$= z^n = 0$. Вычислить период формы $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{k=0}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k$ по этому циклу (нормировочный множитель).

Утверждение 1. Комплексно-аналитическое подмногообразие N^{2m} кэлерова многообразия M^{2n} кэлерово. Если M^{2n} — *ходжево*, то и N^{2m} *ходжево*.

Доказательство. Пусть $f: N^{2m} \rightarrow M^{2n}$ — вложение, ds^2 — эрмитова метрика, дающая на M^{2n} кэлерову структуру, Ω — связанная с ней замкнутая форма. Тогда ds^2 индуцирует эрмитову метрику $f^* ds^2$ на N^{2m} и связанная с ней форма равна $f^* \Omega$ и также замкнута. Поэтому многообразие N^{2m} — кэлерово. Если c — любой двумерный цикл на многообразии N^{2m} , то верно равенство

$$\int_c f^* \Omega = \int_{f \cdot c} \Omega.$$

Для целочисленного цикла c цикл $f \cdot c$ также целочисленный, поэтому $\int_{f \cdot c} \Omega$ — целое число для ходжева многообразия M^{2n} . Отсюда вытекает ходжевость N^{2m} . Утверждение доказано.

В многообразии CP^n выделены компактные комплексные и алгебраические подмногообразия. Простейший класс таких многообразий задается набором уравнений («полные пересечения»)

$$\left. \begin{aligned} F_1(z_0, \dots, z_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F_k(z_0, \dots, z_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где все функции $F_1, \dots, F_k$ — однородные многочлены:

$$F_i(cz_0, \dots, cz_n) = c^{\alpha_i} F_i(z_0, \dots, z_n).$$

Следствие. Все неособые комплексные подмногообразия в CP^n являются многообразиями Ходжа.

Замечание. Каждое такое подмногообразие определяет цикл $N^{2m} \subset CP^n$. Для компактных алгебраических подмногообразий этот цикл никогда не когомологичен нулю. Действительно, пусть $f: N^{2m} \rightarrow CP^n$ вложение; Ω — стандартная форма на CP^n . Тогда $f^* \Omega$ — 2-форма на N^{2m} , связанная с индуцированной кэлеровой метрикой. Поэтому $(f^* \Omega)^m$ — ненулевое кратное элемента объема на N^{2m} . Ввиду компактности будем иметь:

$$\int_{N^{2m}} (f^* \Omega)^m \neq 0,$$

откуда $\int_{f \cdot N^{2m}} \Omega^m \neq 0$. Цикл $f \cdot N^{2m}$ не является границей в CP^n ,

потому что форма Ω^m замкнута, и интеграл ее по любой границе равен нулю в силу формулы Стокса.

Разберем теперь вопрос о ходжевости комплексных торов $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$, где решетка Γ порождена $2n$ линейно независимыми векторами $e_1, \dots, e_{2n}$. Кэлерова метрика на торе T^{2n} получается, если взять в $\mathbb{C}^n$ любую эрмитову метрику с постоянными коэффициентами. Если на T^{2n} задана какая-то кэлерова метрика, то ее можно усреднить (проинтегрировать) по тору T^{2n} и получить метрику с постоянными коэффициентами.

Задача 2. Докажите, что если первоначальная метрика была ходжевой, то и после усреднения получится метрика Ходжа с теми же периодами (мы считаем, что объем тора T^{2n} равен 1).

Итак, достаточно рассмотреть случай метрик с постоянными коэффициентами. Каждая такая метрика определяется некоторым эрмитовым скалярным произведением в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$H(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha\beta} z_1^\alpha \bar{z}_1^\beta, \quad x = (z_1^\alpha), \quad y = (z_1^\beta), \quad (6)$$

$$h_{\beta\alpha} = \bar{h}_{\alpha\beta}.$$

$H(x, y)$ можно рассматривать как комплекснозначную билинейную функцию на $\mathbb{K}^{2n} \times \mathbb{K}^{2n}$, удовлетворяющую соотношениям:

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)}, \quad H(ix, y) = iH(x, y). \quad (7)$$

Если $H(x, y) = F(x, y) + iG(x, y)$, где $F(x, y)$ и $G(x, y)$ вещественны, то из равенств (7) следует, что $F(x, y) = F(y, x)$, $G(x, y) = -G(y, x)$, $F(x, y) = G(ix, y)$. Поэтому форма $F(x, y)$ положительно определена, и вся форма определяется одной мнимой частью $G(x, y)$.

Утверждение 2. Тор $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ является *ходжевским* тогда и только тогда, когда существует вещественная кососимметричная форма $G(x, y) = -G(y, x)$ такая, что:

1) форма $F(x, y) = G(ix, y)$ симметрична и положительно определена.

2) $G(e_\alpha, e_\beta)$ есть целое число для любых двух векторов решетки Γ . Эти условия называют соотношениями Фробениуса.

Доказательство. В силу приведенных выше рассуждений достаточно доказать, что условие 2) эквивалентно *ходжескости* метрики на торе T^{2n} , определенной эрмитовой формой $H(x, y) = G(ix, y) + iG(x, y)$. Мы знаем, что ранг группы $H_2(T^{2n}, \mathbb{Z})$ равен $C_{2n}^2 = n(2n-1)$ (число сочетаний), где базис двумерных циклов в T^{2n} имеет вид $c_{\alpha\beta} = \{\lambda e_\alpha + \mu e_\beta\}$, $0 \leq \lambda, \mu < 1$ ($\alpha < \beta$). Форма G — это форма, связанная с кэлеровой метрикой, поэтому тор T^{2n} является *ходжевским* тогда и только тогда, когда интегралы формы G по всем циклам $c_{\alpha\beta}$ целые.

Ограничение формы G на цикл $c_{\alpha\beta}$ равно $G(e_\alpha, e_\beta) d\lambda \wedge d\mu$, и интеграл по этому циклу равен $G(e_\alpha, e_\beta)$. Утверждение доказано.

В § 4 ч. II книги [1] был введен важный класс абелевых комплексных торов. Если мы определим матрицу (B_{kj}) равенствами $e_{n+k} = \sum_{j=1}^n B_{kj} e_j$, $1 \leq k \leq n$, то для абелева тора матрица

(B_{kj}) должна быть симметрической и иметь положительную мнимую часть. В частности, в предыдущем параграфе было показано, что торы Якоби римановых поверхностей абелевы. Имеет место

Утверждение 3. Любая абелева тор является *ходжевским*.

Доказательство. Зададим эрмитову форму $H(x, y)$ равенством

$$H(x, y) = \beta_{kj} z_1^k \bar{z}_2^j, \quad x = (z_1^1, \dots, z_1^n), \quad y = (z_2^1, \dots, z_2^n). \quad (8)$$

Здесь матрица (β_{kj}) обратная к положительно определенной матрице $\text{Im } B$. Мнимая часть формы $H(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = \text{Im } H(x, y) = \frac{1}{2i} \beta_{kj} (z_1^k \bar{z}_2^j - z_2^k \bar{z}_1^j) \quad (9)$$

в силу симметрии матрицы (β_{kj}) . Проверим, что кососимметрическая форма $G(x, y)$ принимает целые значения на базисе $e_1, \dots, e_{2n}$ решетки Γ . Имеем при $m, l \leq n$:

$$G(e_m, e_l) = \frac{1}{2i} \beta_{lj} (\delta_m^k \delta_l^j - \delta_l^k \delta_m^j) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} G(e_m, e_{n+l}) &= \sum_j \frac{1}{2i} \beta_{lj} (\delta_m^k \bar{B}_{lj} - B_{lj} \delta_m^k) = \\ &= -\delta_m^k \sum_j \beta_{lj} (\text{Im } B)_{jl} = -\delta_m^k \delta_{n+l} = -\delta_{ml} = -G(e_{n+l}, e_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(e_{n+m}, e_{n+l}) &= \sum_{k,j} \frac{1}{2i} \beta_{kj} (B_{mk} \bar{B}_{lj} - B_{lj} \bar{B}_{mk}) = \\ &= \sum_{k,j} \beta_{kj} (b_{mk}^* b_{lj}^* - b_{mk}^* b_{lj}^*) = b_{lm}^* - b_{ml}^* = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения $b_{jk}^* = \text{Re } B_{jk}$, $b_{jk}^* = \text{Im } B_{jk}$. Итак, форма $G(x, y)$ целочисленна на торе $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$. Очевидно, эрмитова метрика (8) положительно определена. Утверждение доказано.

З а д а ч а 3. Доказать справедливость обратного утверждения: любой *ходжев* тор является абелевым.

В заключение отметим, что важность класса *ходжевых* (или абелевых) торов заключается в том, что любой абелев тор может быть явно, с помощью θ -функций, реализован как неособое алгебраическое подмногообразие в комплексном проективном пространстве (Лефшец). Эта теорема верна для всех *ходжевых* многообразий (Кодаира; см. [21]).

§ 14. Гомологии с коэффициентами в пучках

Уместно описать еще один вид гомологий, который имеет существенное значение в различных областях математики (но не в рамках материала данной книги).

Пусть X — пространство, покрытое открытыми областями U_α , $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

Будем требовать, чтобы покрытие $\{U_\alpha\}$ было «локально конечным» (т. е. пересекаться могут только конечные наборы областей U_α).

О п р е д е л е н и е 1. а) *Предпучком* F называется соответствие, которое каждой области $U \subset X$ сопоставляет абелеву группу (кольцо, поле) F_U ; требуется, чтобы вложению $U \subset V$ соответствовал гомоморфизм «ограничения»

$$i_{UV}: F_V \rightarrow F_U. \quad (1)$$

Если $U \subset V \subset W$, то $i_{UV} = i_{UV}i_{VW}$. Предпучок F определяет предпучок $F|_U$ на любой области $U \subset X$.

б) Предпучок F называется *пучком*, если он обладает следующими свойствами:

1) Пусть область U представлена в виде объединения областей U_α :

$$U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Тогда, если $i_{U_{\alpha}U}(f) = 0$ для всех α , то элемент $f \in F_U$ должен быть нулем.

2) У любой точки имеется некоторая достаточно малая окрестность U такая, что набор «согласованных» элементов $f_{\alpha} \in F_{U_{\alpha}}$ представляет собой совокупность ограничений одного общего элемента $f \in F_U$. Здесь

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \quad U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta} = U_{\beta\alpha}, \\ i_{U_{\alpha\beta}U_{\beta}} f_{\beta} &= i_{U_{\beta\alpha}U_{\alpha}} f_{\alpha} \quad (\text{«согласованность»}), \\ i_{U_{\alpha}U} f &= f_{\alpha}. \end{aligned}$$

Пустому множеству $\emptyset$ всегда соответствует нуль: $F_{\emptyset} = 0$.

С покрытием $\{U_{\alpha}\}$ связывается симплициальный комплекс — «нерв покрытия», обозначаемый через $N\{U_{\alpha}\}$:

- 1) вершины σ_{α}^0 соответствуют областям U_{α} ;
- 2) ребра $\sigma_{\alpha\beta}^1$ соответствуют парам (U_{α}, U_{β}) , если пересечение непусто, $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$;
- 3) треугольники $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$ соответствуют тройкам $(U_{\alpha}, U_{\beta}, U_{\gamma})$, где пересечение непусто, $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma} \neq \emptyset$;
- 4) симплекс $\sigma_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_k}^k$ соответствует набору областей $(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k})$ таких, что пересечение $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ непусто.

Возникают «когомологии покрытия» с коэффициентами в предпучке F : k -мерные коцепи — это линейные функции на симплексах $\sigma_{\alpha_0\ldots\alpha_k}^k$ размерности k в нерве $N\{U_{\alpha}\}$ со значением в группах $F(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k})$. Здесь у коцепей на каждом симплексе своя область значений. Коцепи c^k соответствует ее кограница

$$(\delta c^k, \sigma_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}}^{k+1}) = \sum_{q=0}^{k+1} (-1)^q i_{U_{\alpha_q}U} (c^k, \sigma_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}\alpha_{q+1}\ldots\alpha_{k+1}}^k),$$

где

$$(c^k, \sigma_{\alpha_0\ldots\alpha_q\ldots\alpha_{k+1}}^k) \text{ лежит в группе } F_{U_q},$$

$$U = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{k+1}},$$

$$U \subset U_q = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \hat{U}_{\alpha_q} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{k+1}}$$

(область U_{α_q} вычеркнута из пересечения).

Когомологиями покрытия называются фактор-группы коциклов по кограницам:

$$H^q(N\{U_{\alpha}\}, F) = \text{Ker } \delta / \text{Im } \delta = Z^q/B^q.$$

Пусть покрытие $\{V_{\beta}\}$ «вписано» в $\{U_{\alpha}\}$: если пересечение $V_{\beta} \cap U_{\alpha}$ непусто, то V_{β} целиком лежит в U_{α} . Легко проверить, что возникает симплициальное (симплекс переходит в симплекс) отображение нервов этих покрытий:

$$N\{V_{\beta}\} \xrightarrow{\varphi_{UV}} N\{U_{\alpha}\}.$$

Тем самым, используя (1), имеем отображение коцепей и когомологий:

$$H^*(N\{U_{\alpha}\}, F) \xrightarrow{\varphi_{UV}^*} H^*(N\{V_{\beta}\}, F).$$

Вся эта структура (для достаточно «мелких» покрытий) описывает когомологии с коэффициентами в пучке: $H^*(X, F)$ — это «предел спектра» (φ_{UV}^*) всех покрытий пространства X .

Элементы x этого «предела спектра» представлены всевозможными элементами $x_U \in H^q(N\{U_{\alpha}\}, F)$ для всевозможных покрытий $\{U_{\alpha}\}$.

Элементы $x_U \in H(N\{U_{\alpha}\}, F)$ и $x_W \in H(N\{W_{\beta}\}, F)$ представляют один и тот же элемент из $H^q(X, F)$, если и только если для некоторого более мелкого покрытия V , вписанного в U и в W , имеем

$$\varphi_{UV}^* x_U = \varphi_{VW}^* x_W = x_V \in H^q(N\{V_{\beta}\}, F).$$

Пример 1. Постоянный пучок. Пусть $F_U = G$ (абелева группа, одна и та же для всех $U \neq \emptyset$); отображения i_{UV} тождественны

$$i_{UV} \equiv 1: G \approx G.$$

Если $X = M^n$ — многообразие, и покрытие таково, что все множества $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ стягиваемы (например, U_{α} — малые по размеру выпуклые фигуры в метрике M^n), то верно равенство

$$H^*(N\{U_{\alpha}\}, G) = H^*(M^n, G).$$

Задача 1. Докажите, что нерв в этом случае — комплекс, гомологически эквивалентный M^n .

Пример 2. Непрерывные (функциональные) пучки. Здесь F_U — это кольцо (линейное пространство) функций какого-то класса: непрерывных, гладких, голоморфных, алгебраических и т. д. в области $U \subset X$.

Задача 2. Докажите, что $H^0(X, F)$ — функции того же класса, определенные глобально на всем многообразии $X = M^n$ и $F_U = H^0(U, F|_U)$.

Общее определение. Пучком $\tilde{F}$, определяемым предпучком F , называется *новый предпучок* такой, что $\tilde{F}_U = H^0(U, F|_U)$ для любой области U .

Группа $H^1(X, F)$ возникает, например, в такой задаче: пусть задан набор «главных частей» f_α функции f в областях U_α , где $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Здесь $X = M^{2n}$ — комплексное многообразие. Главные части f_α — это, например, лорановские части неизвестной функции f около полюсов. Нужно найти мероморфную функцию f на X такую, что функции $(f - f_\alpha)$ голоморфны в областях U_α . Разумеется, необходима «согласованность» — т. е. $f_\alpha - f_\beta = g_{\alpha\beta}$ голоморфны в пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$. Укажите связь этой задачи с когомологиями $H^1(X, F)$ в пучке, где $F(U) = H^0(U, F)$ — это линейное пространство голоморфных функций в области U . Докажите, что задача разрешима, если $H^1(X, F) = 0$.

Пример 3. Еще один пример пучка: пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение. Области $U \subset Y$ соответствует $f^{-1}(U) \subset X$. Полагаем

$$F_U^i = H^i(f^{-1}(U)).$$

Возникают когомологии $H^q(Y, F^i)$, $i \geq 0$, $q \geq 0$. В наиболее общем варианте теоремы Лере (см. § 8) следует $E_2^{q,i}$ заменить на $H^q(Y, F^i)$. Все остальное остается верным. Если $X \xrightarrow{p} Y$ есть расслоение, где база — клеточный комплекс и односвязна, то мы имеем

$$H^q(Y, F^i) = H^q(Y, H^i(\tilde{F})),$$

где $\tilde{F} = p^{-1}(y)$ — слой. Докажите это.

Пример 4. Пример пучка (вообще говоря, некоммутативных групп) дает задача о классификации расслоения с базой X и структурной группой G , обсуждавшаяся в § 25 ч. II книги [1] с другой точки зрения. Пусть задано расслоение $E \xrightarrow{p} X$ с группой G и слоем $\tilde{F}$. Если $\{U_\alpha\}$ — покрытие X , где $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \tilde{F}$, то структура расслоения определяется «отображениями склейки» (см. [1], ч. II, § 24)

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G. \quad (2)$$

При этом для $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем

$$\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha} = 1. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что набор $(\lambda_{\alpha\beta})$ есть 1-мерный коцикл в покрытии $\{U_\alpha\}$ со значением в пучке F , $F(U_\alpha)$ — непрерывные функции на U_α со значением в G . Если расслоение — прямое, то найдется (возможно, надо сначала измельчить покрытие) набор функций $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ такой, что $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta$. Тем самым классы

расслоения — это элементы из $H^1(X, F)$. Это не группа, если G неабелева.

Задача 3. Вычислить $H^1(X, F)$, если G — абелева группа.

Задача 4. Докажите, что пучок F над гладким многообразием, где F_U — линейное пространство гладких функций в области U (более точно — гладких в замкнутой области $\bar{U} \supset U$), имеет тривиальные когомологии при $q > 0$: $H^q(M^n, F) = 0$, $q > 0$; $H^0(M^n, F) = C^*(M^n)$ — кольцо функций на M^n . Над комплексными многообразиями имеется голоморфный пучок, для которого этот факт неверен.

Задача 5. Аналогично, если задано векторное расслоение с базой $B = M^n$: пусть F_U — это гладкие сечения расслоения над областью U . Докажите равенство (в голоморфном варианте это будет неверно):

$$H^q(M^n, F) = 0, \quad q > 0,$$

$H^0(M^n, F)$ — пространство сечений расслоения.

Указание. Воспользуйтесь тем, что гладкую функцию можно с области U продолжить на все многообразие M^n .

Задача 6. Пусть $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$ — три пучка, где для всех достаточно малых шаровидных областей U имеем точную последовательность групп:

$$0 \rightarrow F_U^{(0)} \xrightarrow{\alpha_U} F_U^{(1)} \xrightarrow{\beta_U} F_U^{(2)} \rightarrow 0,$$

причем все α_U и β_U коммутируют с отображениями $i_U: F_U^{(k)} \rightarrow F_V^{(k)}$ $k = 0, 1, 2$. Постройте точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(M^n, F^{(0)}) &\xrightarrow{\alpha} H^0(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta} \\ &\xrightarrow{\beta} H^0(M^n, F^{(2)}) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, F^{(0)}) \xrightarrow{\alpha} \\ &\xrightarrow{\alpha} H^1(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta} H^1(M^n, F^{(2)}) \xrightarrow{\delta} \\ &\xrightarrow{\delta} H^2(M^n, F^{(0)}) \xrightarrow{\alpha} \dots \end{aligned}$$

Пример 1. Пусть F_U — гладкие вещественные функции в области U , $F_U^{(0)}$ — постоянный пучок $F_U^{(0)} = \mathbb{Z}$ и $F_U^{(1)}$ — функции со значением в $G = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Вычислите $H^1(M^n, F^{(2)})$; используя задачи (см. выше), дайте классификацию расслоений с группой $G^1 = S^1$.

Пример 2. Пусть $\tilde{F}_U^{(1)}$ — линейное пространство голоморфных функций в области U , $\tilde{F}_U^{(0)} = \mathbb{Z}$ — постоянный пучок, $\tilde{F}_U^{(2)}$ — группа по умножению голоморфных функций в U , не обращающихся в нуль. Отображение $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow F_U^{(1)}$ — вложение констант,

отображение $\beta: \tilde{F}_U^{(1)} \rightarrow \tilde{F}_U^{(2)}$ имеет вид $f \mapsto \exp(2\pi i f)$, запись $\tilde{F}_U^{(2)}$ пучка $\tilde{F}^{(2)}$ мультипликативна.

Задача 7. Докажите, что группа $H^1(M^n, \tilde{F}^{(2)})$ классифицирует голоморфные 1-расслоения (см. [1], ч. II, § 25). Какова связь группы $H^1(M^n, \tilde{F}^{(1)})$ с классификацией голоморфных расслоений, являющихся топологически (т. е. без комплексной структуры) прямыми произведениями?

Пример 3. Тензоры — это, по определению, сечения различных тензорных степеней касательного расслоения векторов и ковекторов. С тензорами связаны пучки, где F_U — это гладкие тензорные поля над областью $U \subset M^n$ в базе M^n . В том случае, когда берутся кососимметрические тензоры (с нижними индексами), т. е. дифференциальные формы, мы можем определить пучки F^i , где F_U^i — формы над областью $U \subset M^n$. Возникает «точная последовательность пучков» (т. е. групп F_U^i для всех малых шаровидных областей $U \subset M^n$):

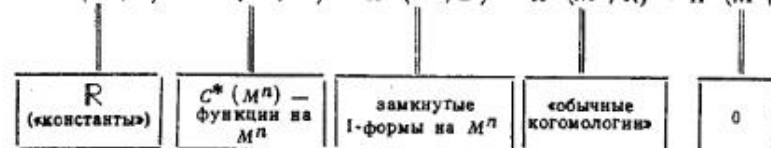
$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F^0 \xrightarrow{d} F^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} F^n \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Здесь R — постоянный пучок (константы), и оператор d в любой области U переводит формы степени i в формы степени $i+1$. Точность последовательности пучков (4) вытекает из следствия 1 теоремы 1.2, утверждающего, что для малых шаровидных областей U каждая замкнутая форма ω с $\deg \omega > 0$ локально точна, т. е. из $d\omega = 0$ и $\deg \omega > 0$ следует $\omega = d\omega'$. Выделим пучок замкнутых форм $Z^i \subset F_U^i$, где $Z^i = \text{Ker } d$ (замкнутые 1-формы в области $U \subset M^n$). Имеем точную последовательность пучков, по определению:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F^{(0)} \xrightarrow{d} Z^1 \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим точную последовательность когомологий этих пучков:

$$0 \rightarrow H^0(M^n, R) \rightarrow H^0(M^n, F^0) \xrightarrow{d} H^0(M^n, Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) \rightarrow H^1(M^n, F^0)$$



Используя результат задачи 4 (см. выше), имеем $H^1(M^n, F^0) = 0$. Поэтому имеем отображение на («эпиморфизм»):

$$H^0(M^n, Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) \longrightarrow 0.$$

Ядро отображения δ имеет вид df , f — гладкая функция. Отсюда заключаем

$$H^1(M^n, R) = \text{Ker } d / \text{Im } d = H^0(M^n, Z^1) / (df)$$

(т. е. классы замкнутых форм по точным).

Усложняя это рассуждение, можно получить уже упоминавшуюся «теорему де Рама» (см. § 6): группы когомологий, определенные через дифференциальные формы, совпадают с симплициальными $H^q(M^n, R)$ для всех q . Продemonстрируем это для $q \leq 2$.

Рассмотрим пучки

$$a) F_U/R = \tilde{F}_U; \quad b) Z_U^i = d(F_U^i)$$

— замкнутые 2-формы.

Имеем две последовательности пучков

$$a) 0 \rightarrow R \rightarrow F^0 \rightarrow F^0/R \rightarrow 0;$$

$$b) 0 \rightarrow F^0/R \xrightarrow{d} F^1 \rightarrow Z^2 \rightarrow 0.$$

Из точной последовательности когомологий для а) заключаем, используя результат задачи 4 (см. выше):

$$a) H^1(M^n, F^0/R) \cong H^2(M^n, R).$$

Из точной последовательности б) имеем:

$$b) H^0(M^n, Z^2)/(df) \cong H^1(M^n, F^0/R).$$

Так как $H^0(M^n, Z^2)$ есть замкнутые формы, то окончательно мы имеем:

$$Z^2(M^n)/(df) \cong H^2(M^n, R).$$